

Lý thuyết Nevanlinna trên trường không Acsimet

Hà Huy Khoái*

Trường Đại học Thăng Long

Ngày nhận bài 30/9/2016, ngày chuyển phản biện 5/10/2016, ngày nhận phản biện 25/10/2016, ngày chấp nhận đăng 31/10/2016

Trong bài này tác giả đưa ra một tổng quan ngắn về hướng nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna trên trường không Acsimet và ứng dụng của nó trong lý thuyết không gian hyperbolic phức, lý thuyết các tập xác định duy nhất các hàm phân hình.

Từ khóa: hàm phân hình, lý thuyết Nevanlinna, trường p -adic.

Chỉ số phân loại 1.1

The Nevanlinna theory on a non-Archimedean field

Summary

In this paper, the author gives a brief survey on the Nevanlinna theory on a non-Archimedean field, and its applications in the theory of hyperbolic spaces, theory of unique range sets of meromorphic functions.

Keywords: meromorphic functions, Nevanlinna theory, p -adic fields.

Classification number 1.1

1. Mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị các hàm phân hình, hay còn gọi là lý thuyết Nevanlinna, là một trong những hướng nghiên cứu trung tâm của giải tích phức. Ở Việt Nam, mở đầu bởi các công trình nổi tiếng của giáo sư Lê Văn Thiêm về bài toán ngược của lý thuyết Nevanlinna, hướng nghiên cứu này đang được tiếp tục phát triển mạnh. Bài viết này nhằm cung cấp một tổng quan ngắn về lý thuyết Nevanlinna, đặc biệt chú trọng đến một số đóng góp của các nhà toán học Việt Nam trong lý thuyết Nevanlinna trên trường không Acsimet, là lý thuyết được xây dựng lần đầu tiên trong công trình [1], và ngày nay đã trở thành một hướng nghiên cứu mạnh trong và ngoài nước.

Ta có thể bắt đầu từ Định lý cơ bản của đại số:

Định lý. Giả sử

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

là đa thức bậc $n \geq 1$, với hệ số phức. Khi đó với mỗi giá trị a , phương trình $f(z) = a$ có n nghiệm (kể cả bội).

Lý thuyết Nevanlinna nghiên cứu vấn đề Hàm phân hình $f(z)$ nhận mỗi giá trị $a \in \mathbf{P}^1$ bao nhiêu lần, hay nói cách khác, làm thế nào để đo tập hợp $f^{-1}(a)$?

Kết quả quan trọng đầu tiên theo hướng này thuộc về Hadamard.

Định lý Hadamard. Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong $\mathbf{C}$. Khi đó (số không điểm của f trong $\{z \mid |z| \leq r\}\} \leq \log \max_{|z| \leq r} |f(z)| + O(1)$, trong đó $O(1)$ phụ thuộc f , nhưng không phụ thuộc r .

Kết quả này chưa phải là “lý tưởng”, vì có hai nhược điểm sau:

- Khi f là hàm phân hình, vế phải của bất đẳng thức là vô cùng, và Định lý Hadamard không đưa lại thông tin gì về số không điểm của hàm f .
- Tồn tại những hàm, chẳng hạn, $f(z) = e^z$, không có không điểm, và trong trường hợp đó, bất đẳng thức Hadamard trở nên tầm thường.

Để khắc phục những nhược điểm trên, R. Nevanlinna định nghĩa các hàm sau đây.

*Email: hhhkhoai@math.ac.vn

1.1. *Hàm đếm.* Giả sử $a \in \mathbb{C}$. Đặt

$n(a, r) = \#\{\text{không điểm của } f(z) - a \text{ trong } \{|z| < r\}, \text{ kể cả bội}\}$

$$N(a, r) = \int_0^r \frac{n(a, t) - n(a, 0)}{t} dt + n(a, 0) \log r$$

1.2. *Hàm đặc trưng.* Thay cho $\log_{|z| \leq r} |f(z)|$ ta xét hàm:

$$T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta + N(\infty, r)$$

Sử dụng hai hàm này, ta nhận được bất đẳng thức sau đây:

$$N(0, r) \leq T(r) + O(1)$$

Bất đẳng thức này đúng và không tầm thường ngay cả đối với các hàm phân hình.

Để khắc phục nhược điểm thứ hai, ta chú ý rằng, hàm e^z tuy không có không điểm, nhưng nhận rất nhiều giá trị "gần với 0". Ta dùng hàm sau đây để "đo" tập hợp tại đó hàm nhận giá trị "gần với 0":

1.3. *Hàm xấp xỉ.*

$$m(a, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - a} \right| d\theta$$

(trong đó $\log^+ = \max(0, \log)$)

Rõ ràng rằng $m(a, r)$ trở nên "lớn" khi $f(z)$ gần với a .

Kết quả trung tâm của lý thuyết Nevanlinna là hai "Định lý cơ bản" và *quan hệ số khuyết*.

1.4. **Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna.** *Tồn tại hàm $T(f)$ sao cho với mọi $a \in \mathbb{P}^1$ ta có*

$$m(a, r) + N(a, r) = T(r) + O(1)$$

Do $T(r)$ không phụ thuộc a , có thể nói rằng hàm phân hình nhận mỗi giá trị $a \in \mathbb{P}^1$ (và những giá trị "gần a ") với một số lần như nhau.

1.5. **Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna.** *Với $q \in \mathbb{N}$ tùy ý và các điểm phân biệt $a_i \in \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, q$*

$$\sum_{i=1}^q m(a_i, r) < 2T(r) + O(\log(rT(r)))$$

trong đó bất đẳng thức thoả mãn trừ ra trên một tập có độ đo giới nội.

Hơn nữa, nếu đặt

$$\delta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(a, r)}{T(r)}$$

ta có

$$\sum_{a \in \mathbb{P}^1} \delta(a) \leq 2 \quad (1)$$

$\delta(a)$ được gọi là *giá trị khuyết* của điểm a và (1) là *quan hệ số khuyết*.

Tổng trong quan hệ số khuyết có nghĩa, vì $\delta(a) = 0$ với hầu hết a (trừ ra trên một tập hợp đếm được).

2. Hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna trên trường không Acsimet

2.1. *Tại sao cần nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna trên trường p -adic?*

Trong công trình nổi tiếng "Từ siêu hình đến toán học" [2], A. Weil đã nói về vai trò của sự tương tự trong toán học. Để minh họa tư tưởng này, ông phân tích về "siêu hình" của Hình học Diophantus: đó là sự tương tự giữa các *số đại số* và các *hàm đại số*. Tuy nhiên, sự tương tự đáng ngạc nhiên giữa lý thuyết độ cao của Weil và Định lý cơ bản thứ hai của Cartan cho trường hợp siêu phẳng chỉ được phát hiện bởi P. Vojta sau 50 năm! P. Vojta đã đưa ra một "từ điển" để phiên dịch những kết quả của lý thuyết Nevanlinna một chiều sang trường hợp xấp xỉ Diophantus. Với "từ điển" này, ta có thể xem Định lý Roth như là một tương tự của Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna. Vojta cũng đưa ra một số giả thuyết định lượng, là mở rộng của định lý Roth lên trường hợp chiều cao. Có thể nói rằng, P. Vojta đề xuất một "siêu hình" mới của Hình học Diophantus: *lý thuyết Nevanlinna số học chiều cao*.

Mặt khác, theo triết lý của nguyên lý Hasse-Minkowski, ta hy vọng có một "kết quả số học" nếu ta có nó trong trường hợp thực, phức, và p -adic với mọi số nguyên tố p . Như vậy, một cách tự nhiên là cần tìm hiểu tương tự của lý thuyết Nevanlinna trên trường p -adic.

Lý thuyết Nevanlinna p -adic được xây dựng lần đầu tiên trong công trình [1] (sau đó trong [3]), và ngày nay đã trở thành một lý thuyết được phát triển rộng rãi, có nhiều ứng dụng trong những vấn đề khác nhau.

Trong những mục sau, chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả chính của thuyết Nevanlinna p -adic và một số ứng dụng của lý thuyết này.

2.2. *Hai định lý cơ bản*

Giả sử p là số nguyên tố, $\mathbb{Q}_p$ là trường các số p -adic, $\mathbb{C}_p$ là bổ sung p -adic của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Định giá trong $\mathbb{Q}_p$ được chuẩn hoá sao cho $|p| = p^{-1}$. Ta cũng sử dụng ký hiệu $v(z)$ cho định giá cộng tính trên $\mathbb{C}_p$, là thác triển của ord_p .

Hàm đếm được định nghĩa hoàn toàn như trong lý thuyết Nevanlinna phức, tức là với hàm phân hình f , giá

sử $n(f, \infty, r)$ ký hiệu số cực điểm trong $\{|z| \leq r\}$, đặt

$$N(f, \infty, r) = \int_0^r [n(f, \infty, t) - n(f, \infty, 0)] \frac{dt}{t} + n(f, \infty, 0) \log r =$$

$$\sum_{|z| \leq r, z \neq 0} \max\{0, -ord_z f\} \log \frac{r}{|z|} + \max\{0, -ord_0 f\} \log r$$

trong đó $ord_z f$ ký hiệu cấp của hàm f tại z , lấy giá trị âm ứng với các cực điểm. Hàm đếm đối với những giá trị khác được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Đối với hàm xấp xỉ, chú ý rằng chuẩn $| \cdot |_r$ là nhân tính trên tập hợp hàm nguyên, và thác triển được sang các hàm phân hình. Định nghĩa

$$m(f, \infty, r) = \log |f|_r$$

và với a hữu hạn,

$$m(f, a, r) = \log \frac{1}{|f - a|_r}$$

Nhận xét rằng trong trường hợp p -adic, không cần việc lấy "trung bình" theo $|z| = r$, do nguyên lý mô đun cực đại mạnh, với z đủ tổng quát có $|z| = r$, ta có $|f(z)| = |f|_r$.

Cuối cùng, cũng như trong trường hợp phức, hàm đặc trưng được cho bởi

$$T(f, a, r) = m(f, a, r) + N(f, a, r)$$

Từ tính chất của đa giác Newton suy ra rằng

$$\log |f|_r = \sum_{|z| \leq r, z \neq 0} (ord_z f) \log \frac{r}{|z|} + (ord_0 f) \log r + 0(1)$$

trong đó số hạng $0(1)$ phụ thuộc vào độ lớn của hệ số khác 0 đầu tiên trong khai triển Laurent của hàm f tại 0.

Công thức Jensen trong trường hợp p -adic có thể viết dưới dạng:

$$m(f, \infty, r) + N(f, \infty, r) = m(f, 0, r) + N(f, 0, r) + 0(1)$$

Từ công thức trên, đặt $T(f, r) = m(f, \infty, r) + N(f, \infty, r)$, ta có hai Định lý cơ bản trong trường hợp p -adic [3].

Định lý cơ bản thứ nhất Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$, và $a \in \mathbb{C}_p \cup \infty$ là giá trị tùy ý. Khi đó ta có:

$$T(f, a, r) = T(f, r) + 0(1)$$

trong đó $0(1)$ là đại lượng giới nội khi $r \rightarrow \infty$.

Định lý cơ bản thứ hai. Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$, và giả sử $a_1, a_2, \dots, a_q$ là những điểm khác nhau trên $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$. Khi đó, với mọi $r \geq r_o > 0$

$$(q-2)T(f, r) - \sum_{j=1}^q N(f, a_j, r) - N_{Ram}(f, r) \leq -\log r + 0(1)$$

trong đó

$$N_{Ram}(f, a) = N(f', 0, r) + 2N(f, \infty, r) - N(f', \infty, r)$$

do cấp tăng của rẽ nhánh của hàm f , và $0(1)$ chỉ phụ thuộc a_j , hàm f và số r_o .

Hệ quả. Giả sử f và $a_1, a_2, \dots, a_q$ như trong phát biểu của Định lý cơ bản thứ hai. Khi đó, với mọi $r \geq r_o$

$$(q-2)T(f, r) \leq \sum_{j=1}^q N_1(f, a_j, r) - \log r + 0(1)$$

trong đó $N_1(f, a_j, r)$ ký hiệu hàm đếm sửa đổi, sao cho mỗi điểm mà $f = a$ chỉ được tính với bội 1, còn $0(1)$ vẫn phụ thuộc vào a_j, f, r_o .

3. Hàm độ cao

Trong trường hợp p -adic, ta có thể sử dụng hàm độ cao. Chú ý rằng, đa giác Newton thể hiện một trong những sự khác nhau cơ bản giữa các hàm giải tích p -adic và các hàm giải tích phức. Cụ thể là, mô đun của một hàm giải tích p -adic chỉ phụ thuộc vào mô đun của đối số, trừ ra trên một tập hợp rời rạc các giá trị của mô đun đối số. Sự kiện này thường giảm nhẹ khó khăn khi chứng minh những tương tự p -adic cho các kết quả cổ điển. Dưới đây, chúng tôi sẽ đưa ra định nghĩa về hàm độ cao (xem [4-9]).

Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích trên $\mathbb{C}_p$, biểu diễn được bởi chuỗi lũy thừa hội tụ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Với mỗi n vẽ đồ thị Γ_n biểu diễn $v(a_n z^n)$ như hàm của $v(z) = t$. Đồ thị này là một đường thẳng với hệ số góc n .

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \{v(a_n) + nt\} = \infty$ với mỗi t nên suy ra rằng với mỗi t tồn tại n sao cho $v(a_n) + nt$ đạt cực tiểu. Giả sử $h(f, t)$ ký hiệu biên của giao của mọi nửa mặt phẳng nằm dưới các đường Γ_n . Khi đó trong mỗi đoạn hữu hạn $[r, s]$, tồn tại hữu hạn đường Γ_n tham gia trong việc thành lập $h(f, t)$. Như vậy, $h(f, t)$ là một đường gấp khúc. Ta gọi

đường gấp khúc này là *độ cao* của hàm $f(z)$. Các điểm t mà $h(f, t)$ có đỉnh tại đó được gọi là các điểm tới hạn của $f(z)$. Mỗi đoạn hữu hạn chỉ có thể chứa hữu hạn điểm tới hạn. Nếu t là một điểm tới hạn, thì $v(a_n) + nt$ đạt cực tiểu tại ít nhất hai giá trị của n . Nếu $v(z) = t$ không là điểm tới hạn thì $|f(z)| = p^{-h(f,t)}$.

Độ cao của hàm $f(z)$ cho thông tin đầy đủ về phân bố không điểm của hàm $f(z)$. Cụ thể là, hàm f có không điểm khi $v(z) = t_i$ (một điểm tới hạn), đồng thời số không điểm của f sao cho $v(z) = t_i$ bằng hiệu $n_{i+1} - n_i$ giữa các hệ số góc của $h(f, t)$ tại t_{i-0} và t_{i+0} .

Đối với hàm phân hình $f = \frac{\phi}{\psi}$, độ cao của f được định nghĩa bởi $h(f, t) = h(\phi, t) - h(\psi, t)$. Ta cũng dùng ký hiệu

$$h^+(f, t) = -h(f, t)$$

Khi đó ta có:

Định lý 3.1 [4, 10]. Giả sử f là hàm phân hình và giả sử $a_1, a_2, \dots, a_q$ là q điểm phân biệt trong $\mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$. Khi đó với t đủ nhỏ

$$(q-2)h^+(f, t) \leq \sum_{j=1}^q N_1(f, a_j, t) + t + o(1)$$

trong đó $N_1(f, a, t)$ ký hiệu hàm đếm đã hiệu chỉnh sao cho mỗi điểm tại đó $f = a$ chỉ được tính với bội 1, và $o(1)$ là đại lượng giới nội khi $t \rightarrow -\infty$.

Hàm độ cao cũng được áp dụng vào vấn đề nội suy (xem [5, 7]). Giả sử $u = \{u_1, u_2, \dots\}$ là một dãy điểm trong $\mathbb{C}_p$. Ta chỉ xét các dãy u mà số các điểm u_i thỏa mãn $v(u_i) \geq t$ là hữu hạn với mỗi t . Ta luôn giả thiết rằng $v(u_i) \geq v(u_{i+1})$, ($i = 1, 2, \dots$).

Định nghĩa 3.2 [4, 10]. Dãy $u = \{u_i\}$ được gọi là *dãy nội suy* của f nếu dãy đa thức nội suy đối với f trên u hội tụ tới f . Với mỗi dãy u ta định nghĩa hàm chỉnh hình Φ_u như sau. Đặt

$$N_u(t) = \#\{u_i | v(u_i) \geq t\}$$

Có thể viết dãy u dưới dạng:

$$u = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_2}, \dots\},$$

trong đó

$$v(u_i) = t_k \text{ for } n_{k-1} < i \leq n_k$$

(ta lấy $u_0 = 0$) và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = -\infty$$

Chọn dãy a_k với tính chất

$$v(a_0) = -n_1 t_1, v(a_{k+1}) = v(a_k) + (n_k - n_{k+1})t_{k+1}, (k = 1, 2, \dots).$$

Đặt

$$\Phi_u(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$$

Khi đó dãy hội tụ trên $z \in \mathbb{C}_p$ và xác định hàm giải tích $\Phi_u(z)$ trên $\mathbb{C}_p$, có số không điểm trong miền $\{z | v(z) > t\}$ bằng $N_u(t)$, và

$$h(\Phi_u, t) = \int_{-\infty}^t N_u(t) dt$$

Định lý 3.3. Dãy $u = \{u_i\}$ là dãy nội suy của hàm $f(z)$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{h(f, t) - h(\Phi_u, t)\} = \infty$$

Nhận xét 3.4. Định lý trên đây là định lý nội suy đầu tiên áp dụng được cho các hàm giải tích p -adic không nhất thiết giới nội. Một định lý tương tự đối với hàm giải tích trong đĩa đơn vị suy ra rằng các L-hàm p -adic kết hợp với dạng modular được xác định duy nhất bởi các giá trị trên các đặc trưng Dirichlet [10-12].

Nhận xét 3.5. Ta có thể áp dụng định lý nội suy để khôi phục hàm phân hình p -adic nếu biết các nghịch ảnh (kể cả bội) của hai điểm [1].

4. Trường hợp chiều cao

Đối với trường hợp chiều cao, cũng như trong trường hợp phức, thay cho việc nghiên cứu nghịch ảnh các điểm, ta cần nghiên cứu nghịch ảnh các divisor với đối chiều 1. Nguyên nhân là vì trong trường hợp p -adic cũng tồn tại các miền Fatou [13].

Khái niệm hàm độ cao cũng được định nghĩa đối với các đường cong chỉnh hình. Giả sử $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) : C_p \rightarrow P^n(C_p)$ là một đường cong chỉnh hình p -adic trong

đó các hàm f_i không có không điểm chung.

Định nghĩa 4.1. Độ cao của đường cong chỉnh hình f được định nghĩa bởi

$$h(f, t) = \min_{1 \leq j \leq n+1} h(f_j, t)$$

trong đó $h(f_j, t)$ là độ cao của hàm chỉnh hình p -adic trong $\mathbb{C}_p$.

Chú ý rằng độ cao của một đường cong xác định sai khác một đại lượng giới nội.

Định lý sau đây là một tương tự p -adic của Định lý cơ bản thứ hai cho trường hợp đường cong chỉnh hình.

Định lý 4.2 [14]. *Giả sử $H_1, \dots, H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát, và giả sử f là đường cong chỉnh hình không suy biến trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$. Khi đó ta có*

$$(q - n - 1)h^+(f, t) \leq \sum_{j=1}^q N_n(f, H_j, t) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot t + O(1)$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng giới nội khi $t \rightarrow -\infty$ và $h^+(h, t) = -h(f, t)$.

Cherry và Ye ([15]) đã mở rộng định lý trên lên trường hợp chiều cao. Hơn nữa, họ xét cả trường hợp các đường cong suy biến bằng cách sử dụng trọng số Nochka.

Đối với trường hợp siêu mặt, ta có định lý sau:

Định lý 4.3. *Giả sử $H_1, \dots, H_q$ là các siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát. Giả sử f là đường cong chỉnh hình không suy biến. Khi đó*

$$(q - n)h^+(f, t) \leq \sum_{j=1}^q \frac{N(f \circ H_j, t)}{d} + O(1)$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng giới nội khi $t \rightarrow -\infty$.

Định lý trên đây là một phiên bản p -adic của định lý Eremenko-Sodin.

Ta kết thúc phần này bằng giả thuyết sau đây.

Đường cong chỉnh hình f được gọi là k -không suy biến nếu ảnh của f được chứa trong một không gian con tuyến tính số chiều k và không được chứa trong bất kỳ không gian con tuyến tính nào với chiều $k - 1$.

Giả thuyết 4.4. *Giả sử $H_1, \dots, H_q$ là các siêu mặt*

bậc d_j , $j = 1, \dots, q$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ ở vị trí tổng quát. Giả sử f là đường cong chỉnh hình k -không suy biến. Giả sử s là số nguyên $\geq k$, hoặc $s = \infty$. Khi đó

$$(q - 2n + k - 1)h^+(f, t) \leq \sum_{j=1}^q \frac{N_s(H_j \circ f, t)}{d_j} + O(1)$$

Nhận xét 4.5. Trong trường hợp phức, giả thuyết trên tương ứng với những trường hợp sau đây:

1. Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna: $n = 1$, $k = 1$, $d_j = 1$, $s = \infty$.
2. Định lý Cartan: $\forall n$, $k = n$, $d_j = 1$, $s = n$.
3. Định lý Nochka (Giả thuyết Cartan): $\forall n, \forall k \leq n$, $s = k$, $d = 1$.
4. Định lý Eremenko-Sodin: $\forall n, k = n, \forall d_j, s = \infty$.

5. Quan hệ số khuyết và các bổ đề kiểu Borel

Giả sử H là siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ sao cho ảnh của f không được chứa trong H . Ta nói rằng f rẽ nhánh ít nhất d ($d > 0$) trên H nếu với mọi $z \in f^{-1}H$ bậc của divisor f^*H , $\deg_z f^*H \geq d$. Trong trường hợp $f^{-1}H = \emptyset$ ta đặt $d = \infty$.

Định lý 5.1. *Giả sử $H_1, \dots, H_q$ là q siêu mặt ở vị trí tổng quát. Giả sử f không suy biến tuyến tính và rẽ nhánh ít nhất d_j trên H_j . Khi đó*

$$\sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{n}{d_j}\right) < n + 1$$

Nhận xét 5.2. Trong trường hợp phức, ta có bất đẳng thức tương tự, nhưng với dấu $\leq$. Nguyên nhân là vì trong trường hợp p -adic, số hạng dư trong Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna đơn giản hơn. Điều này rất quan trọng trong nhiều ứng dụng.

Từ định lý trên, có thể chứng minh một dạng sau đây của bổ đề Borel p -adic:

Định lý 5.3. *Giả sử $f_1, f_2, \dots, f_n$ ($n \geq 3$) là các hàm chỉnh hình p -adic không có không điểm chung trong $\mathbb{C}_p$*

sao cho $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$.

Khi đó các hàm $f_1, \dots, f_{n-1}$ là phụ thuộc tuyến tính nếu với $j = 1, \dots, n$, mỗi không điểm của f_j có bội ít nhất là d_j và điều kiện sau đây thoả mãn:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j} \leq \frac{1}{n-2}$$

Dùng quan hệ số khuyết, ta có thể thiết lập một số mở rộng của bổ đề Borel.

Giả sử

$$M_j = z_1^{\alpha_{j,1}} \dots z_{n+1}^{\alpha_{j,n+1}}, \quad 1 \leq j \leq s$$

là các đơn thức phân biệt bậc l với số mũ không âm. Giả sử X là siêu mặt bậc dl của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ xác định bởi

$$X : c_1 M_1^d + \dots + c_s M_s^d = 0$$

trong đó $c_j \in \mathbb{C}_p^*$ là những hằng số khác 0.

Định lý 5.4. (Tương tự p-adic của định lý Masuda-Noguchi).

Giả sử $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) : C_p \rightarrow X$ là đường cong chỉnh hình khác hằng sao cho mọi $f_j \not\equiv 0$. Giả sử

$$d \geq s(s-2)$$

Khi đó tồn tại một phân hoạch các chỉ số $\{1, 2, \dots, s\} = \cup I_\gamma$, sao cho

- i) Mỗi I_γ chứa ít nhất hai chỉ số.
- ii) Các thương $M_j^d \circ f(z)$ và $M_k^d \circ f(z)$ là hằng số với mọi $j, k \in I_\gamma$.
- iii) $\sum_{j \in I_\gamma} c_j M_j^d \circ f(z) \equiv 0$ với mọi γ .

Hệ quả 5.5. Với $d \geq 3$ không tồn tại nghiệm của phương trình sau đây trong tập hợp các hàm chỉnh hình p-adic khác hằng không có không điểm chung:

$$x^d + y^d = z^d$$

6. Không gian hyperbolic p-adic

Một không gian phức được gọi là không gian hyperbolic nếu mọi đường cong chỉnh hình trong đó đều là hằng.

Trong trường hợp phức, bổ đề Borel thường được sử dụng để thiết lập tính hyperbolic của các không gian phức. Dưới đây chúng tôi sẽ chỉ ra một số ứng dụng của bổ đề Borel p-adic trong việc nghiên cứu các siêu mặt hyperbolic p-adic.

Mặc dù tập hợp các siêu mặt hyperbolic bậc d đủ lớn so với n được giả thuyết là trù mật Zariski, không dễ xây dựng ví dụ về siêu mặt hyperbolic.

Ví dụ đầu tiên về siêu mặt hyperbolic nhẵn bậc chẵn $d \geq 50$ được cho bởi R. Brody và M. Green. Ta sẽ xem làm thế nào dùng bổ đề Borel p-adic để xây dựng siêu mặt hyperbolic p-adic (xem [16]).

Giả sử X là siêu mặt xác định như trên, và giả sử $d \geq s(s-2)$. Giả sử X không hyperbolic, và

$$f = (f_1, \dots, f_{n+1}) : \mathbb{C}_p \rightarrow X$$

là đường cong chỉnh hình khác hằng trong X . Ta chỉ ra rằng $\{c_j\}$ thuộc vào một tập hợp đại số của $(\mathbb{C}_p^*)^s$. Có thể giả thiết mọi $f_j \not\equiv 0$.

Do Định lý 5.3, tồn tại phân hoạch các chỉ số $\{1, \dots, s\} = \cup I_\xi$ sao cho

- i) Mỗi I_ξ chứa ít nhất 2 chỉ số.
- ii) Thương $M_j^d \circ f(z)$ và $M_k^d \circ f(z)$ là hằng số với $j, k \in I_\xi$.
- iii) $\sum_{j \in I_\xi} c_j M_j^d \circ f(z) \equiv 0$ với mọi ξ .

Với phân hoạch $\{1, \dots, s\}$ như trên, đặt: $b_{jk} = M_j^d \circ f(z) / M_k^d \circ f(z)$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính

$$AY = B$$

trong đó A là ma trận $\{\alpha_{j\ell} - \alpha_{k\ell}\}$, Y là ma trận cột $\{y_j\}$, $B = \{\log b_{jk}\}$, có nghiệm $\{\log f_0, \dots, \log f_n\}$.

Như vậy ma trận A thoả mãn một số điều kiện về hạng. Mặt khác, do điều kiện, iii) tồn tại $(A_0, \dots, A_n) \in \mathbb{P}^n$ sao cho $(c_i) \in (\mathbb{C}_p^*)^s$ thoả mãn phương trình sau

$$\sum_{i \in I_\xi} c_i A_o^{\alpha_{io}} \dots A_n^{\alpha_{in}} = 0$$

Do đó, $(c_i) \in (\mathbb{C}_p^*)^s$ thuộc vào hình chiếu $\Sigma \subset (\mathbb{C}_p^*)^s$ của một tập con đại số trong $(\mathbb{C}_p^*)^s \times \mathbb{P}^n$. Nếu lấy $(c_i) \notin \Sigma$, ta có một siêu mặt hyperbolic.

Đối với trường hợp các mặt trong $\mathbb{P}^3$ ta có thể sử dụng phương pháp sau. Trước tiên lấy mặt $X \subset \mathbb{P}^3$ sao cho mỗi đường cong chẵn hình trong X là suy biến. Điều đó có nghĩa là ảnh của một ánh xạ chẵn hình từ $\mathbb{C}_p$ vào X , $f: \mathbb{C}_p \rightarrow X$, được chứa trong tập đại số thực sự của X . Nếu ta chứng minh được rằng ảnh của $f(\mathbb{C}_p)$ được chứa trong một đường cong có giống ít nhất bằng 1, thì f là ánh xạ hằng (Định lý Berkovich).

7. Tập xác định duy nhất các hàm phân hình

Với mỗi hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$ và một tập con $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ định nghĩa

$$E_f(S) = \cup_{a \in S} \{(m, z) | f(z) = a \text{ tính cả bội } m\}$$

và

$$\bar{E}_f(S) = \cup_{a \in S} \{z | f(z) = a \text{ không tính bội } \}$$

Tập con $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là *tập xác định duy nhất các hàm phân hình* (URSM) nếu với mọi cặp hàm phân hình khác hằng f và g trên $\mathbb{C}$, điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f = g$. Tập con $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là *tập xác định duy nhất đối với các hàm nguyên* (URSE) nếu với cặp hàm nguyên khác hằng bất kỳ f và g trên $\mathbb{C}$, điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f = g$. Các định lý cổ điển của Nevanlinna chỉ ra rằng $f = g$ nếu $\bar{E}_f(a_j) = \bar{E}_g(a_j)$ với những giá trị phân biệt $a_1, \dots, a_5$, và f là một biến đổi Möbius của g nếu $E_f(a_j) = E_g(a_j)$ với những giá trị phân biệt $a_1, \dots, a_4$. Gross và Yang [17] chỉ ra rằng

$$S = \{z \in \mathbb{C} | z + e^z = 0\}$$

là một URSE. Các URSE và URSM với hữu hạn phân tử đã được xây dựng bởi Yi, Li và Yang, Mues và Reinders

Frank và Reinders. Li và Yang đưa ra khái niệm

$$\lambda_M = \inf \{\#S | S \text{ là URSM}\}$$

$$\lambda_E = \inf \{\#S | S \text{ là URSE}\}$$

trong đó $\#S$ là lực lượng của tập S . Cận dưới tốt nhất được biết cho đến nay là

$$5 \leq \lambda_E \leq 7, 6 \leq \lambda_M \leq 11$$

Đối với những lớp hàm mà mọi không điểm và cực điểm của chúng đều có bội ≥ 2 , ta có định lý sau [18]:

Định lý 7.1. *Tồn tại tập hợp S gồm 7 điểm sao cho đối với hai hàm phân hình f và g mà mọi không điểm và cực điểm của chúng đều có bội ≥ 2 , điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f = g$.*

Đối với các hàm nguyên hoặc hàm phân hình p -adic f trên $\mathbb{C}_p$, ta có những định nghĩa tương tự của $E_f(S)$ và $\bar{E}_f(S)$ đối với tập con $S \subset \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ và khái niệm λ_M và λ_E . Sử dụng lý thuyết Nevanlinna p -adic ta có thể thiết lập các định lý sau:

Định lý 7.2 [19, 20]. *Giả sử $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là tập hợp gồm 4 điểm đủ tổng quát trong $\mathbb{C}_p$. Khi đó đối với các hàm phân hình p -adic f và g , điều kiện $E_f(S) = E_g(S)$ và $E_f(\infty) = E_g(\infty)$ kéo theo $f \equiv g$.*

Gần đây, vấn đề tập xác định duy nhất được xem xét cho trường hợp đa thức vi phân của các hàm phân hình (xem [21-29]).

Tài liệu tham khảo

- [1] Ha Huy Khoai (1983), "On p -adic meromorphic function", *Duke Math. J.*, **Vol.50**.
- [2] A. Weil, *De la métaphysique aux mathématiques*, Euvres t.II, p.408.
- [3] Ha Huy Khoai and My Vinh Quang, " p -adic Nevanlinna Theory", *Lecture Notes in Math.* **1351**, pp.138-152.
- [4] Ha Huy Khoai (1980), " p -adic Interpolation and the Mellin-Mazur transform", *Acta Math. Vietnam*, **5(1)**.
- [5] Ha Huy Khoai (1983), " p -adic Interpolation and continuation of p -adic functions", *Lecture Notes in Math.*, **1013**, pp.252-265.
- [6] Ha Huy Khoai (1991), "La hauteur des fonctions holomorphes p -adiques de plusieurs variables", *C.R.A. Sc. Paris.*, **312**, pp.751-754.
- [7] Ha Huy Khoai (1991), "La hauteur d'une suite de points dans $\mathbb{C}_p$ et l'interpolation des fonctions holomorphes de plusieurs variables", *C.R.A. Sc.*

Paris, **312**, pp.903-905.

[8] Ha Huy Khoai (1992), "Heights for p-adic meromorphic functions and value distribution theory", *Vietnam. J. Math.*, **20(1)**, pp.2-14.

[9] Ha Huy Khoai (1993), "Heights for p-adic holomorphic functions and applications", *RIMS Lecture Note*, **819**, pp.96-105.

[10] Ha Huy Khoai (1979), "Onp-adic Interpolation", *Mat. Zametki*, **26(1)** (in russian), pp.541-549.

[11] Ha Huy Khoai (1979), "Sur une conjecture de Mazur et Swinnerton-Dyer", *C.R.A. Sc. Paris*, **Vol.289**.

[12] Ha Huy Khoai (1979), "On p-adic L-functions associated to elliptic curves", *Mat. Zametki*, **26(2)**.

[13] Ha Huy Khoai (2005), "p-Adic Fatou-Bieberbach mappings", *Inter. J. Math.*, **16(3)**.

[14] Ha Huy Khoai and Mai Van Tu (1995), "p-adic Nevanlinna-Cartan Theorem", *Internat. J. Math.*, **6(5)**, pp.710-731.

[15] W. Cherry and Z.Ye (1997), "Non-Archimedean Nevanlinna Theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349(12)**, pp.5043-5071.

[16] Ha Huy Khoai (1997), "p-adic Hyperbolic surfaces", *Acta Math. Vietnam*, **2**, pp.99-112.

[17] F. Gross and C.C. Yang (1982), "On pre-images and range sets of meromor-phic funtion", *Proc. Japan Acad*, **58**, pp.17-20.

[18] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2016), "Strong uniqueness polynomials of degree 6 and unique range sets for powers of meromorphic functions", *TIMAS Preprint series*.

[19] Ha Huy Khoai and Ta Thi Hoai An (2003), "Uniqueness problem with truncated multiplicities for meromorphic functions on a non- Archimedean

field", *Southeast Asian Bull. Math.*, **3**, pp.477-486.

[20] Ha Huy Khoai and Ta Thi Hoai An (2001), "On uniqueness polynomials and bi-URS for p-adic meromorphic functions", *J. Number Theory*, **87(2)**, pp.211-221.

[21] A. Escassut and J. Ojeda (2014), "The p-adic Hayman Conjecture when $n=2$ ", *Complex Variable and Elliptic Equations*, **59(10)**, pp.1451-1456.

[22] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2011), "Value distribution problem for p-adic meromorphic functions and their derivatives", *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, **XX(Special)**, pp.135-149.

[23] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2012), "Value - sharing problem for p-adic meromorphic functions and their difference operators and difference polynomials", *Ukranian Math. J.*, **64(2)**, pp.147-164.

[24] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for p-adic meromorphic functions", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **38**, pp.71-92.

[25] R.G. Halburd and R.J. Korhonen (2006), "Nevanlinna theory for the difference operator", *Ann.Acad.Sci.Fenn.Math.*, **31**, pp.463-478.

[26] K. Liu and L.Z. Yang (2009), "Value distribution of the difference operator", *Archiv der Mathematik*, **92(3)**, pp.270-278.

[27] I. Laine and C.C. Yang (2007), "Value distribution of difference polynomials", *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, **83(8)**, pp.148-151.

[28] S. Nevo, X. Pang, L. Zalcman (2006), "Picard-Hayman behavior of derivatives of meromorphic funtions with multiple zeros", *Electron. Res. Announce. Amer. Math. Soc.*, **12**, pp.37-43.

[29] J. Ojeda (2008), "Hayman's conjecture in ap-adic field", *Taiwanese J. Math.*, **9**, pp.2295-2313.