

Ổn định phi tuyến của tấm E-FGM có gân gia cường trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt độ

Nguyễn Đình Đức*, Phạm Hồng Công, Hồ Xuân Tính

Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội

Ngày nhận bài 11/12/2015, ngày chuyển phản biện 21/12/2015, ngày nhận phản biện 22/1/2016, ngày chấp nhận đăng 11/3/2016

Bài báo nghiên cứu ổn định phi tuyến và trạng thái sau ổn định của tấm E-FGM không hoàn hảo có gân gia cường dưới tác dụng của nhiệt độ và đặt trên nền đàn hồi, trong đó mô đun đàn hồi của vật liệu được biến đổi liên tục theo chiều dày và được giả thiết phân bố theo quy luật hàm siêu việt (hàm e mũ). Cả tấm E-FGM và gân đều bị biến dạng dưới tác dụng của tải nhiệt. Sử dụng lý thuyết tấm cổ điển, trong đó có kể đến yếu tố phi tuyến về hình học, không hoàn hảo về hình dáng ban đầu, tính chất phụ thuộc vào nhiệt độ và kỹ thuật san gân Lekhnitsky với mô hình nền đàn hồi Pasternak. Bài báo sử dụng phương pháp Galerkin và hàm ứng suất để phân tích ảnh hưởng của yếu tố hình học, nhiệt độ, nền đàn hồi và gân gia cường lên trạng thái vòng và sau vòng của tấm E-FGM có gân gia cường trong trường nhiệt độ.

Từ khóa: gân gia cường, lý thuyết tấm cổ điển, môi trường nhiệt độ, nền đàn hồi, quy luật hàm siêu việt (hàm e mũ), vật liệu chức năng (vật liệu có cơ tính biến đổi).

Chỉ số phân loại 2.2

Nonlinear buckling and postbuckling analysis of an eccentrically stiffened E-FGM plate on elastic foundation in the thermal environment

Summary

This paper presents the nonlinear buckling and postbuckling analysis of imperfect eccentrically stiffened FGM plates under the effect of temperature and resting on elastic foundation using an exponential distribution law (E-FGM). Both the E-FGM plate and stiffeners are deformed under thermal loads. The formulations are based on the classical plate theory taking into account geometrical nonlinearity, initial geometrical imperfection, temperature-dependent properties and the Lekhnitsky's smeared stiffeners technique with the Pasternak type elastic foundation. By applying Galerkin method and using stress function, the effects of geometrical properties, temperature, elastic foundation and eccentrically stiffeners on the buckling and postbuckling loading capacity of the eccentrically stiffened E-FGM plate in the thermal environment are analysed and discussed.

Keywords: eccentrically stiffened, elastic foundation, exponential distribution law, functionally graded materials (FGM), the classical plate theory, thermal environment.

Classification number 2.2

Đặt vấn đề

Vật liệu composite là loại vật liệu được chế tạo từ hai hay nhiều loại vật liệu thành phần khác nhau. Mỗi thành phần lại có những đặc trưng cơ - lý - hóa riêng biệt và khi tổng hợp chúng lại sẽ tạo ra một vật liệu mới nhằm đạt được các tính chất ưu việt như khối lượng nhẹ, độ cứng và độ bền cao, khả năng kháng nhiệt, chống ăn mòn hoá học tốt... Tuy nhiên, tại bề mặt tiếp xúc giữa hai lớp vật liệu có sự không liên tục về ứng suất. Đặc biệt, trong trường nhiệt độ cao, sự chênh lệch lớn giữa các hằng số giãn nở nhiệt của vật liệu sẽ gây ra ứng suất lớn; sẽ xuất hiện vết nứt, sự bong tách. Vật liệu có cơ tính biến thiên còn gọi là vật liệu biến đổi chức năng (Functionally graded materials - FGM) được một nhóm các nhà khoa học Nhật Bản phát minh lần đầu tiên vào năm 1984 để khắc phục những hạn chế đó.

Ngày nay, nghiên cứu về ổn định tĩnh như phân tích trạng thái vòng và sau vòng của kết cấu FGM rất cần được quan tâm và là mối quan tâm chính vì

*Tác giả liên hệ: Email: ducnd@ynu.edu.vn

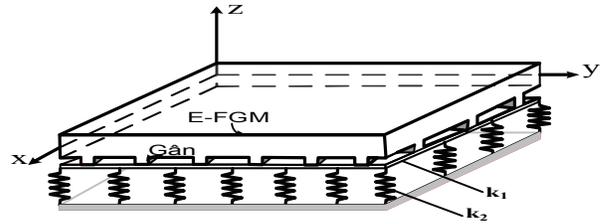
sự an toàn trong sử dụng và tối ưu kết cấu. Javaheri và Eslami [1-3], Shariat và Eslami [4] đã nghiên cứu trạng thái vòng của tấm FGM sử dụng lý thuyết tấm cổ điển [1, 2] và lý thuyết biến dạng trượt bậc cao [3, 4]. Trong [5-7], Shariat có nghiên cứu ảnh hưởng của yếu tố không hoàn hảo ban đầu. Trong [8, 9], Duc và Tung đã nghiên cứu ứng xử vòng và sau vòng của tấm FGM, sử dụng lý thuyết cổ điển [8], biến dạng trượt [9]. Để tăng khả năng chịu tải trọng đặc biệt trong trường nhiệt độ, nhiều tác giả đã nghiên cứu tấm FGM có gân gia cường. Bích [10], đã đề xuất và nghiên cứu tấm có gân gia cường theo kỹ thuật san gân Lekhnitsky để nghiên cứu ổn định... Gia cường có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ được nghiên cứu trong [11, 12], trong [11, 12] Duc và các cộng sự đã nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm và vỏ hai độ cong có gân gia cường trên nền đàn hồi, trong đó kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ đồng thời lên tấm và gân. Tuy nhiên, những nghiên cứu trên mới cho vật liệu P-FGM (hàm mật độ khối lượng được giả thiết phân bố theo quy luật hàm số mũ, Power-law function) và S-FGM (hàm mật độ khối lượng được giả thiết tuân theo quy luật hàm Sigmoid). Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện chưa có công bố nghiên cứu về ổn định tĩnh và động của tấm làm bằng vật liệu E-FGM (mô đun đàn hồi của vật liệu chức năng này được giả thiết theo quy luật hàm siêu việt, hàm e mũ) có gân trên nền đàn hồi.

Chính vì vậy, mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến của tấm E-FGM có gân gia cường trong trường nhiệt độ, trong đó tính chất hiệu dụng của vật liệu được giả thiết phân bố theo quy luật hàm siêu việt (hàm e mũ) và là hàm phi tuyến của nhiệt độ. Lý thuyết tấm cổ điển, kỹ thuật san gân của Lekhnitsky được sử dụng để đưa ra các phương trình cơ bản biểu diễn mối quan hệ giữa độ võng - tải trọng. Ảnh hưởng của tham số hình học, yếu tố không hoàn hảo, nền đàn hồi và nhiệt độ lên ứng xử vòng và sau vòng của tấm E-FGM có gân gia cường được nghiên cứu và thảo luận.

Nội dung nghiên cứu

Mô hình tấm E-FGM có gân trên nền đàn hồi

Xét tấm hình chữ nhật được làm từ vật liệu biến đổi chức năng và được gia cường bởi gân. Tấm có chiều dài, chiều rộng, chiều dày tương ứng là a, b, h được đặt trong hệ tọa độ đề các (x, y, z) , mặt phẳng (x, y) trùng với mặt giữa của tấm và z hướng theo chiều dày của tấm (hình 1).



Hình 1: tấm E-FGM trên nền đàn hồi

Tỷ lệ thể tích các thành phần kim loại và ceramic biến đổi theo chiều dày của vật liệu và được giả thiết tuân theo quy luật hàm siêu việt (hàm e mũ):

$$E(z) = E_c e^{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)}, \alpha(z) = \alpha_c e^{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha_c}{\alpha_m}\right) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)} \quad (1)$$

trong đó E, α lần lượt là mô đun đàn hồi và hệ số dẫn nhiệt, chỉ số dưới (x, y, z) để chỉ hai thành phần gồm (ceramic) và kim loại (metal).

Trong môi trường nhiệt độ, các hằng số vật liệu được giả thiết là hàm phi tuyến của nhiệt độ tuyệt đối $T(K)$:

$$P_r = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (2)$$

trong đó $T = T_0 + \Delta T$ (K) với $T_0 = 300K$ (nhiệt độ phòng), và các hệ số được cho như trong bảng 1.

Phương trình cơ bản

Lý thuyết tấm cổ điển được sử dụng để dẫn ra các phương trình cân bằng và tương thích biến dạng cũng như các biểu thức hiệu của các tải tới hạn và đường cong liên hệ độ võng - tải trọng.

Thành phần biến dạng của tấm ở một điểm cách mặt giữa một đoạn z được xác định bởi [8]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

trong đó $\varepsilon_{\alpha x}, \varepsilon_{\alpha y}$ là các thành phần biến dạng pháp ở mặt giữa tương ứng theo các hướng trục Ox, Oy; $Y_{\alpha xy}$ là biến dạng trượt ở mặt giữa của tấm; k_x, k_y là các thành phần biểu thị độ cong của tấm và k_{xy} là thành phần biểu thị độ xoắn của tấm.

Phương trình tương thích biến dạng của tấm chữ nhật không hoàn hảo [8]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

Các biểu thức của định luật Hooke cho tấm được xác định như sau [8]:

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y) &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x, \varepsilon_y) + \nu(\varepsilon_y, \varepsilon_x) - (1+\nu)\alpha \Delta T(1,1)] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (6)$$

cho gân gia cường [11, 12]:

$$(\sigma_x^{st}, \sigma_y^{st}) = E_0 (\varepsilon_x, \varepsilon_y) - \frac{E_0}{1-2\nu_0} \alpha_0(T) \Delta T(1,1) \quad (7)$$

trong đó E_0, ν_0, α_0 lần lượt là mô đun đàn hồi, hệ số Poisson, hệ số dẫn nở nhiệt của gân.

Sử dụng kỹ thuật san gân của Lekhnitsky như đã được áp dụng trong [10], trong bài này, các thành phần nội lực và momen trong tấm có gân trong môi trường nhiệt được chúng tôi áp dụng tương tự như trong [11,12] và có dạng sau:

$$\begin{aligned} N_x &= \left(P_{11} + \frac{E_0^T A_1^T}{S_1^T} \right) \varepsilon_x^0 + P_{12} \varepsilon_y^0 + (J_{11} + F_1^T) k_x + J_{12} k_y + \phi_1 \\ N_y &= P_{12} \varepsilon_x^0 + \left(P_{22} + \frac{E_0^T A_2^T}{S_2^T} \right) \varepsilon_y^0 + J_{12} k_x + (J_{22} + F_2^T) k_y + \phi_2 \\ N_{xy} &= P_{66} \gamma_{xy}^0 + 2J_{66} k_{xy} \\ M_x &= (J_{11} + F_1^T) \varepsilon_x^0 + J_{12} \varepsilon_y^0 + \left(H_{11} + \frac{E_0^T J_1^T}{S_1^T} \right) k_x + H_{12} k_y + \phi_2 \\ M_y &= J_{12} \varepsilon_x^0 + (J_{22} + F_2^T) \varepsilon_y^0 + H_{12} k_x + \left(H_{22} + \frac{E_0^T J_2^T}{S_2^T} \right) k_y + \phi_2 \\ M_{xy} &= J_{66} \gamma_{xy}^0 + 2H_{66} k_{xy} \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2}, P_{12} = \frac{E_1 \nu}{1-\nu^2}, P_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu)}, J_{11} = J_{22} = \frac{E_2}{1-\nu^2}, J_{12} = \frac{E_2 \nu}{1-\nu^2}, J_{66} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \\ H_{11} &= H_{22} = \frac{E_3}{1-\nu^2}, H_{12} = \frac{E_3 \nu}{1-\nu^2}, H_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)} \\ E_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz = \frac{h(E_c - E_m)}{\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right)} \\ E_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz = \frac{h^2}{\left(\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \right)^2} \left(E_c \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) - 1 \right) + E_m \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) + 1 \right) \right) \\ E_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz = \frac{h^3}{\left(\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \right)^3} \left(E_c \left(\frac{\left(\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \right)^2}{4} - \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) + 2 \right) - E_m \left(\frac{\left(\ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \right)^2}{4} + \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) + 2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) \Delta T(z)}{1-\nu} dz, \phi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z) \alpha(z) z \Delta T(z)}{1-\nu} dz \\ I_1^T &= \frac{d_1^T (h_1^T)^3}{12} + A_1^T (z_1^T)^2, I_2^T = \frac{d_2^T (h_2^T)^3}{12} + A_2^T (z_2^T)^2 \\ F_1^T &= \frac{E_0 A_1^T z_1^T}{S_1^T}, F_2^T = \frac{E_0 A_2^T z_2^T}{S_2^T}, z_1^T = \frac{h_1^T + h^T}{2}, z_2^T = \frac{h_2^T + h^T}{2} \end{aligned}$$

Trong đó, các đại lượng và giá trị với chỉ số trên “T” được hiểu là đã tính đến sự biến dạng hình dáng do nhiệt gây ra và được xác định như sau:

$$\begin{aligned} d_1^T &= d_1(1 + \alpha_m \Delta T(z)), d_2^T = d_2(1 + \alpha_m \Delta T(z)), z_1^T = z_1(1 + \alpha_m \Delta T(z)), z_2^T = z_2(1 + \alpha_m \Delta T(z)) \\ S_1^T &= S_1(1 + \alpha_m \Delta T(z)), S_2^T = S_2(1 + \alpha_m \Delta T(z)), h_1^T = h_1(1 + \alpha_m \Delta T(z)), h_2^T = h_2(1 + \alpha_m \Delta T(z)) \end{aligned}$$

Hệ phương trình cân bằng của tấm chữ nhật hoàn hảo trên nền đàn hồi có dạng [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{N_x \partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{N_{xy} \partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{N_y \partial^2 w}{\partial y^2} - k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Để giải hệ phương trình, ta dùng phương pháp hàm ứng suất thỏa mãn hai phương trình đầu của (9) như sau:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

Thay (3) và (8) vào phương trình cân bằng (9) ta thu được:

$$\begin{aligned} J_{21} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + J_{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + (J_{11}^* + J_{22}^* - 2J_{66}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + \left((J_{11} + F_1^T) J_{11}^* + J_{12} J_{21}^* - \left(H_{11} + \frac{E_0^T J_1^T}{S_1^T} \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ + \left((J_{11} + F_1^T) J_{12}^* + J_{12} J_{22}^* + 4J_{66} J_{66}^* - 4H_{66} + J_{12} J_{11}^* + (J_{22} + F_2^T) J_{21}^* - 2H_{12} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + \left(J_{12} J_{12}^* + (J_{22} + F_2^T) J_{22}^* - \left(H_{22} + \frac{E_0^T J_2^T}{S_2^T} \right) \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_1 w + k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Rút $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ ở (8) sau đó thay vào phương trình tương thích biến dạng (5) ta được:

$$\begin{aligned} P_{11}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + P_{22}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + (P_{66}^* - 2P_{12}^*) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + J_{21}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + J_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (J_{11}^* + J_{22}^* - 2J_{66}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó:

$$\Delta = \left(P_{11} + \frac{E_0^T A_1^T}{S_1^T} \right) \left(P_{22} + \frac{E_0^T A_2^T}{S_2^T} \right) - P_{12}^2, P_{11}^* = \frac{1}{\Delta} \left(P_{11} + \frac{E_0^T A_1^T}{S_1^T} \right); P_{22}^* = \frac{1}{\Delta} \left(P_{22} + \frac{E_0^T A_2^T}{S_2^T} \right)$$

$$P_{12}^* = \frac{P_{12}}{\Delta}; P_{66}^* = \frac{1}{P_{66}}; J_{11}^* = P_{22}^* (J_{11} + F_1^T) - P_{12}^* J_{12}$$

$$J_{22}^* = P_{11}^* (J_{22} + F_2^T) - P_{12}^* J_{12}; J_{12}^* = P_{22}^* J_{12} - P_{12}^* (J_{22} + F_2^T)$$

$$J_{21}^* = P_{11}^* J_{12} - P_{12}^* (J_{11} + F_1^T); J_{66}^* = \frac{J_{66}}{P_{66}}$$

Phân tích ổn định phi tuyến của tấm E-FGM có gân trên nền đàn hồi

Trong mục này, phương pháp giải tích được sử dụng để nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm chữ nhật E-FGM có gân trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải cơ và nhiệt. Xét hai trường hợp điều kiện biên như sau:

Trường hợp 1: tất cả bốn cạnh của tấm tựa bản lề và có thể tự do dịch chuyển trong mặt phẳng tấm:

$$w = N_{xy} = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ tại } x = 0, a \tag{13}$$

$$w = N_{xy} = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ tại } y = 0, b$$

Trường hợp 2: tất cả 4 cạnh của tấm tựa bản lề và không thể dịch chuyển trong mặt phẳng tấm:

$$w = u = M_x = 0, N_x = N_{x0} \text{ tại } x = 0, a \tag{14}$$

$$w = v = M_y = 0, N_y = N_{y0} \text{ tại } y = 0, b$$

trong đó, N_{x0}, N_{y0} là các lực tác dụng lên cạnh của tấm trong trường hợp các cạnh có thể tự do dịch chuyển và là các phản lực trong trường hợp tấm không thể dịch chuyển trên các cạnh.

Dạng nghiệm được chọn thỏa mãn điều kiện biên (13, 14) như sau [5, 7-9]:

$$w = W \sin \lambda_m x \sin \delta_n y, w^* = \mu h \sin \lambda_m x \sin \delta_n y$$

$$\varphi = A_1 \cos 2\lambda_m x + A_2 \cos 2\delta_n y + A_3 \sin \lambda_m x \sin \delta_n y + A_4 \cos 2\lambda_m x \cos 2\delta_n y$$

$$+ \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 \tag{15}$$

với $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}; \delta_n = \frac{n\pi}{b}$; m,n=1,2,3... là các số tự

nhiên biểu diễn số nửa sóng trong các hướng x,y tương ứng; A_i (i=1,2,3,4) là các hệ số cần xác định và W là biên độ của độ võng; μ là tham số mô tả tính không hoàn hảo của tấm.

Thay các dạng nghiệm ở (15) vào phương trình tương thích biến dạng (12), ta xác định được các hệ số như sau:

$$A_1 = \frac{\delta_n^2}{32 P_{11}^* \lambda_m^2} W (W + 2\mu h); A_2 = \frac{\lambda_m^2}{32 P_{22}^* \delta_n^2} W (W + 2\mu h)$$

$$A_3 = - \frac{J_{21}^* \lambda_m^4 + J_{12}^* \delta_n^4 + (J_{11}^* + J_{22}^* - 2J_{66}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2}{P_{11}^* \lambda_m^4 - (2P_{12}^* - P_{66}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + P_{22}^* \delta_n^4} W \tag{16}$$

$$A_4 = 0$$

Thay các biểu thức (15) và (16) vào phương trình cân bằng (11) và áp dụng phương pháp Bubnov-Galerkin cho phương trình kết quả:

$$\left(\frac{-2J_{21}^*}{3P_{11}^*} + \frac{-2J_{12}^*}{3P_{22}^*} \right) \lambda_m \delta_n W (W + 2\mu h) - \frac{[J_{21}^* \lambda_m^4 + J_{12}^* \delta_n^4 + (J_{11}^* + J_{22}^* - 2J_{66}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2]^2}{4(P_{11}^* \lambda_m^4 - (2P_{12}^* - P_{66}^*) \lambda_m^2 \delta_n^2 + P_{22}^* \delta_n^4)} W ab$$

$$+ (A \lambda_m^4 + B \lambda_m^2 \delta_n^2 + C \delta_n^4) \left(\frac{W ab}{4} \right) - \left(\frac{\lambda_m^4}{64 P_{22}^*} + \frac{\delta_n^4}{64 P_{11}^*} \right) W (W + \mu h) (W + 2\mu h) ab$$

$$+ \frac{8A_3 (W + \mu h) \lambda_m \delta_n}{3} - (N_{x0} \lambda_m^2 + N_{y0} \delta_n^2) \frac{(W + \mu h) ab}{4} - \frac{k_1 W ab}{4} - (\lambda_m^2 + \delta_n^2) k_2 \frac{W ab}{4} = 0 \tag{17}$$

Thực hiện các bước tính toán tương tự như trong bài báo [11], ta thu được các biểu thức biểu diễn mối quan hệ giữa tải trọng (tải cơ, tải nhiệt) và độ võng như bên dưới:

Biểu thức mối quan hệ giữa tải cơ - độ võng:

$$P_x = -b_1^1 \bar{W} - b_1^2 \frac{\bar{W}}{W + \mu} + b_1^3 \frac{\bar{W}(\bar{W} + 2\mu)}{W + \mu} + b_1^4 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) \tag{18}$$

trong đó:

$$b_1^1 = \frac{32mn B_a^2}{3 B_h^2} \left[- \frac{B_a^4 m^4 J_{21} + n^4 J_{12} + (J_{11} + J_{22} - 2J_{66}) B_a^2 m^2 n^2}{B_a^4 m^4 P_{11} + n^4 P_{22} + (P_{66} - 2P_{12}) B_a^2 m^2 n^2} \right] \frac{1}{m^2 B_a^2 + n^2 \beta}$$

$$b_1^2 = \frac{\left[\frac{(B_a^4 m^4 J_{21} + n^4 J_{12} + (J_{11} + J_{22} - 2J_{66}) B_a^2 m^2 n^2)^2}{B_a^4 m^4 P_{11} + P_{22} n^4 + (P_{66} - 2P_{12}) B_a^2 m^2 n^2} + \frac{\pi^2}{B_h^2 (B_a^2 m^2 + \beta n^2)} \right]}{AB_a^4 m^4 + Cn^4 + BB_a^2 m^2 n^2 + \frac{K_1 B_a^4 A}{\pi^4} + \frac{AK_2 B_a^2}{\pi^2} (B_a^2 m^2 + n^2)}$$

$$b_1^3 = \frac{8mn B_a^2}{3 B_h^2} \left(\frac{J_{21}}{P_{11}} + \frac{J_{12}}{P_{22}} \right) \frac{1}{m^2 B_a^2 + \beta n^2}$$

$$b_1^4 = \frac{\pi^2}{16 B_h^2} \left(\frac{m^4 B_a^4}{P_{22}} + \frac{n^4}{P_{11}} \right) \frac{1}{m^2 B_a^2 + \beta n^2}$$

Biểu thức mối quan hệ giữa tải nhiệt - độ võng:

$$\Delta T = \frac{1}{L} \left(b_2^1 \bar{W} + b_2^2 \frac{\bar{W}}{W + \mu} - b_2^3 \frac{\bar{W}(\bar{W} + 2\mu)}{W + \mu} - b_2^4 \bar{W}(\bar{W} + 2\mu) \right) \tag{19}$$

$$b_1^2 = \frac{B_h^2}{(B_a^2 m^2 + n^2)} \left[\frac{32mnB_a^2 \left(B_a^4 m^4 \bar{J}_{21} + n^4 \bar{J}_{12} + (\bar{J}_{11} + \bar{J}_{22} - 2\bar{J}_{66}) m^2 n^2 B_a^2 \right)}{3B_h^4 \left(\bar{P}_{11} B_a^4 m^4 + \bar{P}_{22} n^4 + (\bar{P}_{66} - 2\bar{P}_{12}) m^2 n^2 B_a^2 \right)} - \frac{4nmB_a^2 \left(\frac{(\bar{J}_{12} \bar{P}_{11} + \bar{P}_{12} \bar{J}_{22})}{(\bar{P}_{22} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}^2)} \right)}{B_h^4 \left(B_a^4 m^4 \bar{J}_{21} + n^4 \bar{J}_{12} + (\bar{J}_{11} + \bar{J}_{22} - 2\bar{J}_{66}) m^2 n^2 B_a^2 \right)} - \frac{4nmB_a^2 \left(\frac{(\bar{P}_{22} \bar{J}_{21} + \bar{P}_{12} \bar{J}_{11})}{(\bar{P}_{22} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}^2)} \right)}{B_h^4 \left(B_a^4 m^4 \bar{J}_{21} + n^4 \bar{J}_{12} + (\bar{J}_{11} + \bar{J}_{22} - 2\bar{J}_{66}) m^2 n^2 B_a^2 \right)} - \frac{4(\bar{P}_{12} \bar{J}_{12} + \bar{P}_{22} \bar{J}_{22}) n^3}{(\bar{P}_{22} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}^2) m B_h^4} \right]$$

$$b_2^2 = \frac{1}{(B_a^2 m^2 + n^2) B_h^2 \pi^2} \left[\frac{(B_a^4 m^4 \bar{J}_{21} + n^4 \bar{J}_{12} + (\bar{J}_{11} + \bar{J}_{22} - 2\bar{J}_{66}) B_a^2 m^2 n^2) \pi^4}{\bar{P}_{11} B_a^4 m^4 + \bar{P}_{22} n^4 + (\bar{P}_{66} - 2\bar{P}_{12}) B_a^2 m^2 n^2} + \frac{AB_a^4 m^4 \pi^4 + \bar{C} n^4 \pi^4 + \bar{B} B_a^2 m^2 n^2 \pi^4}{-B_a^2 K_1 \bar{A} - B_a^2 K_2 \pi^2 \bar{A} (B_a^2 m^2 + n^2)} \right]$$

$$b_2^3 = \frac{8mnB_a^2}{3(B_a^2 m^2 + n^2) B_h^2} \left(\frac{\bar{J}_{21}}{\bar{P}_{11}} + \frac{\bar{J}_{12}}{\bar{P}_{22}} \right)$$

$$b_2^4 = \frac{\pi^2}{(B_a^2 m^2 + n^2)} \left[\frac{1}{16B_h^2} \left(\frac{B_a^4 m^4}{\bar{P}_{22}} + \frac{n^4}{\bar{P}_{11}} \right) + \frac{m^2 B_a^2}{8B_h^2 (\bar{P}_{22} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}^2)} (m^2 B_a^2 \bar{P}_{11} + n^2 \bar{P}_{12}) \right. \\ \left. + \frac{n^2}{8B_h^2 (\bar{P}_{22} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}^2)} (\bar{P}_{12} m^2 B_a^2 + \bar{P}_{22} n^2) \right]$$

$$\bar{P}_{11} = hP_{11}, \bar{P}_{12} = hP_{12}, \bar{P}_{22} = hP_{22}, \bar{P}_{66} = hP_{66}$$

$$\bar{J}_{11} = \frac{J_{11}^*}{h}, \bar{J}_{12} = \frac{J_{12}^*}{h}, \bar{J}_{21} = \frac{J_{21}^*}{h}, \bar{J}_{22} = \frac{J_{22}^*}{h}, \bar{J}_{66} = \frac{J_{66}^*}{h}$$

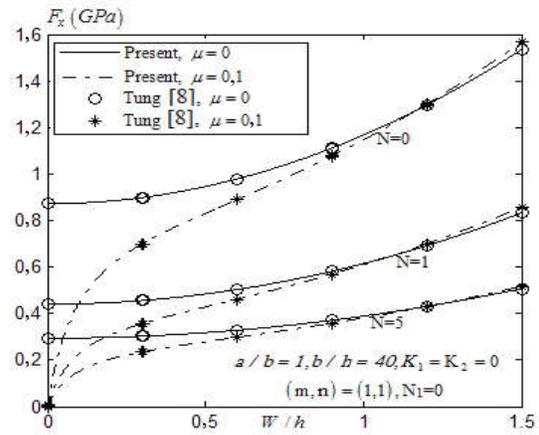
$$\bar{A} = -\frac{A}{h^3}, \bar{C} = -\frac{C}{h^3}, \bar{B} = -\frac{B}{h^3}, K_1 = -\frac{k_1 a^4}{A}, K_2 = -\frac{k_2 a^2}{A}, \bar{W} = \frac{W}{h}, B_a = \frac{b}{a}, B_n = \frac{b}{h}, \beta = \frac{F_x}{F_z}$$

$$A = \left((J_{11} + F_1^T) J_{11}^* + J_{12} J_{21}^* - \left(H_{11} + \frac{E_0^T F_1^T}{S_1^T} \right) \right), C = \left(J_{12} J_{12}^* + (J_{22} + F_2^T) J_{22}^* - \left(H_{22} + \frac{E_0^T F_2^T}{S_2^T} \right) \right)$$

$$B = (J_{12} J_{22}^* - H_{12} + (J_{11} + F_1^T) J_{12}^* + J_{12} J_{11}^* + (J_{22} + F_2^T) J_{21}^* - H_{12} + 4J_{66} J_{66}^* - 4H_{66})$$

Kết quả

Để kiểm tra độ tin cậy của phương pháp được sử dụng trong bài báo này, chúng tôi sử dụng đầu vào là mô hình tấm P-FGM (hàm mật độ khối lượng được giả thiết phân bố theo quy luật hàm số mũ, Power-law function). Cụ thể đầu vào là các hệ số E_p, E_z, E_3 như trong bài báo [8], kết quả giải số được so sánh với bài báo [8] trong trường hợp không có gân gia cường (hình 2).



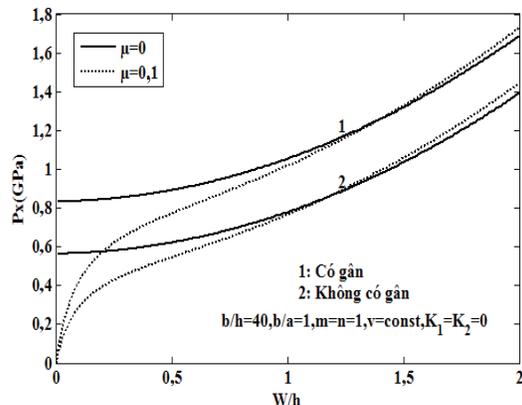
Hình 2: so sánh đường cong - độ võng của tấm FGM trong trường hợp không có gân gia cường

Trong mục này, một vài ví dụ số được trình bày cho cả tấm hoàn hảo và không hoàn hảo. Các thành phần vật liệu là silicon nitride S_{i_3}, N_4 (ceramic) và thép không gỉ SUS304 (stainless steelinoc) được cho trong bảng 1.

Bảng 1: các hệ số phụ thuộc nhiệt độ của silicon nitride và thép không gỉ

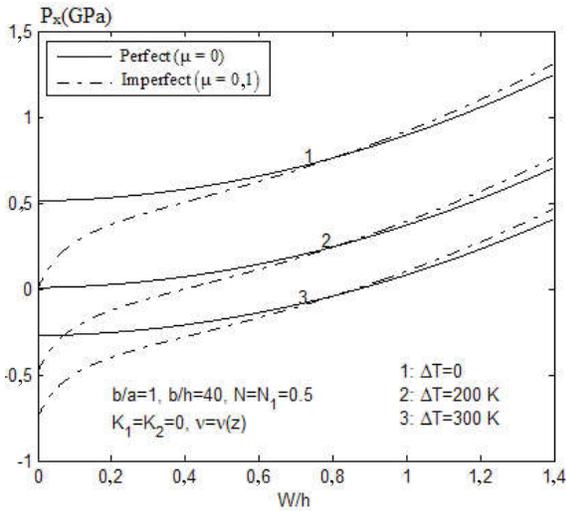
Tính chất	Vật liệu	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
$E(Pa)$	$S_{i_3}N_4$	0	348.43×10^9	-3.070×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
	SUS304	0	201.04×10^9	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
$\alpha(1/K)$	$S_{i_3}N_4$	0	5.8732×10^{-6}	9.095×10^{-4}	0	0
	SUS304	0	12.330×10^{-6}	8.086×10^{-4}	0	0

Hình 3 so sánh ảnh hưởng của gân gia cường lên đường cong độ võng của tấm E-FGM, đường (1) có gân và đường (2) không có gân gia cường. Từ hình vẽ, có thể thấy rằng, tấm E-FGM có gân có đường cong độ võng cao hơn so với trường hợp không có gân gia cường, hay khả năng mang tải của tấm E-FGM có gân gia cường tốt hơn.



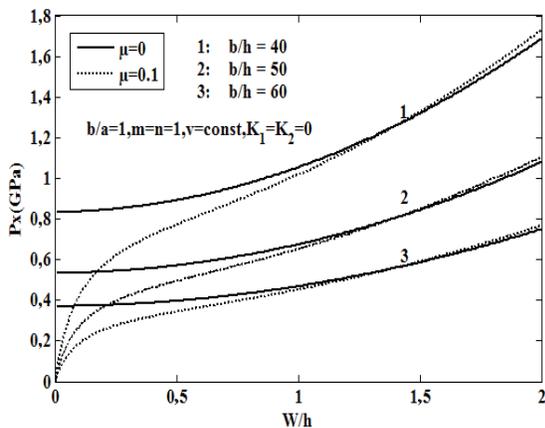
Hình 3: ảnh hưởng của gân gia cường lên ứng xử võng và sau võng của tấm E-FGM

Hình 4 chỉ ra ảnh hưởng của sự biến thiên nhiệt độ lên ứng xử của tấm E-FGM có gân chịu tải cơ. Có thể thấy rằng, sự có mặt của nhiệt độ làm cho khả năng mang tải của cả tấm phẳng và tấm không hoàn hảo trở nên kém hơn. Đồng thời, khi có sự biến thiên nhiệt độ $\Delta T \neq 0$, các tấm không hoàn hảo đã bắt đầu võng thêm ngay cả khi chưa tác dụng lực cơ học. Điều này được thể hiện bằng giao điểm của các đường nét đứt với trục W/h .



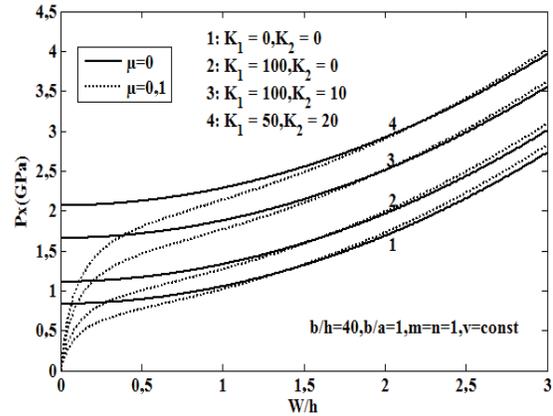
Hình 4: ảnh hưởng của nhiệt độ lên sự ổn định của tấm E-FGM có gân chịu nén

Hình 5 cho thấy ảnh hưởng của tỷ số chiều rộng trên chiều dày lên khả năng chịu tải cơ của tấm E-FGM với các trường hợp $b/h = (40, 50, 60)$ và tấm được xét là hình vuông ($a/b = 1$). Ta thấy khả năng chịu tải cơ của tấm tỷ lệ nghịch với tỷ lệ chiều rộng/độ dày. Tức là tấm càng lớn và càng mỏng thì khả năng chịu nén sẽ càng thấp và ngược lại.



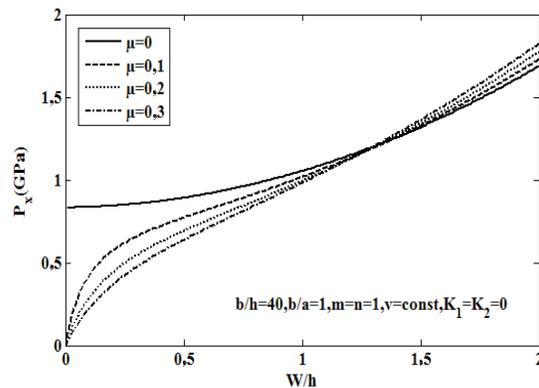
Hình 5: ảnh hưởng của hệ số b/h lên sự ổn định của tấm E-FGM chịu nén

Hình 6 cho thấy ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi lên ứng xử vòng và sau vòng của tấm E-FGM chịu tải cơ khí ta thay đổi giá trị của hệ số nền đàn hồi K_1 và K_2 . Ta thấy rằng, khả năng chịu tải vòng và sau vòng của tấm E-FGM tốt hơn khi tăng hệ số nền đàn hồi. Đặc biệt, ảnh hưởng tích cực của hệ số nền K_2 lớn hơn so với hệ số nền K_1 .



Hình 6: ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi lên sự ổn định của tấm E-FGM chịu tải cơ

Hình 7 xét ảnh hưởng của tính không hoàn hảo lên sự ổn định của các tấm E-FGM chịu tải cơ. Từ hình vẽ có thể thấy rằng, khi độ võng còn nhỏ khả năng mang tải cơ của tấm giảm khi tăng các giá trị của μ . Tuy nhiên, một xu hướng biến đổi ngược lại diễn ra khi độ võng đủ lớn, tức là khi độ võng lớn thì các đường cân bằng độ võng - tải trọng trở nên cao hơn (khả năng mang tải của tấm tốt hơn) với các giá trị μ lớn hơn.



Hình 7: ảnh hưởng của tính không hoàn hảo lên sự ổn định của tấm E-FGM chịu tải cơ

Kết luận

Bài báo đã nghiên cứu ổn định tĩnh phi tuyến hình học (phân tích trạng thái vòng và sau vòng) của tấm E-FGM có gân trên nền đàn hồi, một số kết quả chủ

yếu thu được như sau:

- Xây dựng được biểu thức mối quan hệ giữa độ võng - tải trọng để phân tích ứng xử vòng và sau vòng của tấm E-FGM có gân gia cường trên nền đàn hồi trong trường nhiệt độ.

- Phân tích ứng xử của vật liệu khi có gân và không có gân gia cường. Kết quả cho thấy, khi tấm có gân gia cường thì khả năng mang tải sẽ tốt hơn.

- Phân tích ảnh hưởng của các tham số hình học, nhiệt độ, nền đàn hồi, yếu tố không hoàn hảo lên ứng xử vòng và sau vòng của tấm E-FGM.

Tài liệu tham khảo

[1] R. Javaheri, M.R. Eslami (2002), "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *ZAMM*, **82(4)**, pp.277-283.

[2] R. Javaheri, M.R. Eslami (2002), "Thermal buckling of functionally graded plates", *ALAA J*, **40(1)**, pp.162-169.

[3] R. Javaheri, M.R. Eslami (2002), "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory", *J Therm Stress*, **25(1)**, pp.603-625.

[4] B.A. Samsam Shariat, M.R. Eslami (2007), "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads",

Compos Struct, **78**, pp.433-439.

[5] B.A. Samsam Shariat, R. Javaheri, M.R. Eslami (2005), "Buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading", *Thin-Wall Struct*, **43**, pp.1020-1036.

[6] B.A. Samsam Shariat, M.R. Eslami, (2006), Thermal buckling of imperfect functionally graded plates, *Int J Solids Struct*, **43**, pp.4082-4096.

[7] B.A. Samsam Shariat, M.R. Eslami (2005), "Effect of initial imperfection on thermal buckling of functionally graded plates", *J Therm Stress*, **28**, pp.1183-1198.

[8] H.V. Tung, N.D. Duc (2010), "Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads", *Composite Structures*, **92**, pp.1184-1191.

[9] N.D. Duc, H.V. Tung (2011), "Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations", *Composite Structures*, **93**, pp.2874-2881.

[10] D.H. Bich, V.H. Nam, N.T. Phuong (2011), "Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells", *Vietnam J Mech*, **33(3)**, pp.131-147.

[11] N.D. Duc, P.H. Cong (2014), "Nonlinear postbuckling of an eccentrically stiffened thin FGM plate resting on elastic foundation in thermal environments", *J. Thin Walled Structures*, **75**, pp.103-112.

[12] N.D. Duc, T.Q. Quan (2013), "Nonlinear postbuckling of imperfect double curved thin FGM shallow shells on elastic foundations subjected to mechanical loads". *J.Mechanics of Composite Materials*, **49(5)**, pp.493-506.