Vấn đề nhận giá trị và duy nhất đối với đa thức vi phân của hàm phân hình P-ADIC

Nguyễn Xuân Lai*

Trường Cao đẳng Hải Dương

Ngày nhận bài 30/9/2016, ngày chuyển phản biện 6/10/2016, ngày nhận phản biện 7/11/2016, ngày chấp nhận đăng 15/11/2016

Trong bài báo này, bằng việc sử dụng Định lý cơ bản thứ hai, tác giả nghiên cứu vấn đề nhận giá trị và duy nhất cho hàm phân hình p-adic, chứng minh kết quả tương tự Định lý Yang-Hua cho hàm phân hình p-adic trong trường hợp không tính bội.

Từ khóa: ***Giả thuyết Hayman, hàm đếm, hàm phân hình p-adic, phân bố giá trị, trường khôngAcsimet.***

Chỉ số phân loại ***1.1***

Value sharing problem and uniqueness for differential polynomias of p-adic meromorphic functions

Summary

In this paper, by using the second main Theorem, the author discusses the uniqueness problem for p-adic meromorphic functions, and proves a version of Yang and Hua's Theorem for p-adic meromorphic functions within the cases ignoring multiplicities.

Keywords: ***counting function, Hayman Conjecture, non-Archimedean field, p-adic Meromorphic functions, Value distribution.***

Classification number ***1.1***

*Email: laicdhd@gmail.com

1. Mở đầu

Vấn đề nhận giá trị và duy nhất đối với đạo hàm phân hình p-adic là vấn đề được nhiều nhà toán học trong nước và trên thế giới nghiên cứu. Vấn đề này có liên quan với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm phân biệt. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman [1]. *Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì f là hằng.*

Các kết quả liên quan đến Giả thuyết Hayman đã hình thành và phát triển hướng nghiên cứu: Sự lựa chọn Hayman. Giả thuyết Hayman đối với hàm phân hình được giải quyết năm 2005. Từ năm 2008, Giả thuyết Hayman được nghiên cứu trong trường hợp p-adic. Ojeda là người đầu tiên đã xét phân bố giá trị của $f^n f'$ với f là hàm phân hình p-adic.

Năm 1997, Yang và Hu đã chứng minh được kết quả dưới đây:

Định lý A [2]. *Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}$ - $\{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -a^2$.*

Năm 2012, Hà Huy Khoái, Vũ Hoài An và Nguyễn Xuân Lai [3] đã xét phân bố giá trị và vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình p-adic dạng $(f^n)^{(k)}, (g^n)^{(k)}$. Họ đã thu được kết quả tương tự của Yang - Hua (Định lý A) đối với hàm phân hình p-adic.

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra kết quả tương tự Định lý Yang - Hua cho hàm phân hình p-adic trong trường hợp không tính bội. Cụ thể chúng tôi chứng minh được định lý sau:

Định lý 1. *Giả sử f và g là hai hàm phân hình khác hằng*

trên $\mathbb{K}$ *và* $\overline{E}_{f^n f'}(a) = \overline{E}_{g^n g'}(a), a \in \mathbb{K}, a \neq 0, n \geq 22$. *Khi đó* $f \equiv dg$, với $d^{n+1} = 1, d \in \mathbb{K}$.

Công cụ chính để chứng minh là định lý Nevanina p-adic trong trường không Acsimet, các khái niệm, tính chất và ký hiệu cơ bản trong bài báo theo [4].

2. Vấn đề nhận giá trị và duy nhất cho hàm phân hình p-adic

Trước hết ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 [4]. *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$ và giả sử $a_1, a_2, ..., a_q$ là các giá trị phân biệt của $\mathbb{K}$. Khi đó*

$$(q-1)T(r,f) \leq N_1(r,f) + \sum_{i=1}^{q} N_1(r, \frac{1}{f-a_i}) - \log r + O(1)$$

Bổ đề 2.2. *Cho f và g là các hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ và*

$$F = \frac{1}{f-1}, G = \frac{1}{g-1},\ L = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}$$

1. Nếu $E_f(1) = E_g(1)$ và $L \not\equiv 0$, khi đó

$$T(r,f) \leq N_2(r,f) + N_2(r, \frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r, \frac{1}{g}) - log\ r + O(1)$$

và tương tự bất đẳng thức đối với $T(r,g)$.

2. Nếu $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ và $L \equiv 0$, thì một trong ba trường hợp dưới đây xảy ra:

i) $T(r,f) \leq N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{f}) + N_1(r,g) + N_1(r, \frac{1}{g}) - \log r + O(1)$

và tương tự bất đẳng thức đối với $T(r,g)$.

ii) $fg \equiv 1$.

iii) $f \equiv g$.

Chứng minh. 1. Được suy ra trực tiếp từ chứng minh Bổ đề 3.5 của [5].

2. Do $L \equiv 0$ ta có

$$\frac{F''}{F'} \equiv \frac{G''}{G'}$$

Do đó

$$f \equiv \frac{ag+b}{cg+d},$$

ở đó $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ thỏa mãn $ad - bc \neq 0$. Khi đó $T(r,f) = T(r,g) + O(1)$

Tiếp theo ta xét các trường hợp nhỏ dưới đây:

Trường hợp nhỏ 1. $ac \neq 0$. Khi đó

$$f - \frac{a}{c} \equiv \frac{b - \frac{ad}{c}}{cg+d}$$

Do Bổ đề 2.1

$$T(r,f) \leq N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{f - \frac{a}{c}}) + N_1(r,f) - \log r + O(1)$$

$$= N_1(r,f) + N_1(r,g) + N_1(r, \frac{1}{f}) - \log r + O(1)$$

Ta được i).

Trường hợp nhỏ 2. $a \neq 0, c = 0$. Khi đó $f \equiv \frac{ag+b}{d}$. Nếu $b \neq 0$, thì theo Bổ đề 2.1 ta có

$$T(r,f) \leq N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{f - \frac{b}{d}}) + N_1(r, \frac{1}{f}) - \log r + O(1)$$

$$= N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{g}) + N_1(r, \frac{1}{f}) - \log r + O(1)$$

Ta được i).

Nếu $b = 0$, thì $f \equiv \frac{ag}{d}$. Nếu $\frac{a}{d} = 1$, khi đó $f \equiv g$. Ta được iii).

Nếu $\frac{a}{d} \neq 1$, thì theo $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ ta có $f \neq 1, f \neq \frac{a}{d}$. Chú ý rằng nếu f là hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ là không bao giờ lấy trên hai điểm trong $\widehat{\mathbb{K}}$, khi đó f là hằng số (xem [6, 7]). Từ điều này và $f \neq 1, f \neq \frac{a}{d}$ ta nhận được mâu thuẫn.

Trường hợp nhỏ 3. $a = 0, c \neq 0$. Khi đó $f \equiv \frac{b}{cg+d}$. Nếu $d \neq 0$, theo Bổ đề 2.1 ta có

$$T(r,f) \leq N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{f - \frac{b}{d}}) + N_1(r, \frac{1}{f}) - \log r + O(1)$$

$$= N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{g}) + N_1(r, \frac{1}{f}) - \log r + O(1)$$

Ta nhận được i).

Nếu $d = 0$, thì $f \equiv \frac{b}{cg}$. Nếu $\frac{b}{c} = 1$, thì $fg \equiv 1$. Ta nhận được ii).

Nếu $\frac{b}{c} \neq 1$, thì theo $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ ta có $f \neq 1, f \neq \frac{b}{c}$. Bằng lý lẽ tương tự như trong trường hợp nhỏ 2 ta nhận được mâu thuẫn.

Bổ đề 2.2 được chứng minh hoàn toàn.

Bổ đề 2.3. *Cho f và g là các hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{K}$. Nếu $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ thì một trong ba trường hợp sau đây là đúng.*

i) $T(r,f) \leq N_2(r,f) + N_2(r, \frac{1}{f}) + N_2(r,g) + N_2(r, \frac{1}{g}) + 2(N_1(r,f) + N_1(r, \frac{1}{f})) + N_1(r,g) + N_1(r, \frac{1}{g}) - 2log\ r + O(1)$.

Bất đẳng thức tương tự cũng đúng cho $T(r,g)$;

ii) $fg = 1$.

iii) $f \equiv g$.

Chứng minh. Đặt

$$F = \frac{1}{f-1}, G = \frac{1}{g-1}, L = \frac{f''}{f'} - 2\frac{f'}{f-1} - \frac{g''}{g'} + 2\frac{g'}{g-1}$$

Khi đó

$$L = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'} \qquad (2.1)$$

Bây giờ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $L \not\equiv 0$. Do (2.1) nên tất cả các cực điểm của L đều có bậc 1. Viết $f = \frac{f_1}{f_2}$ (tương ứng $g = \frac{g_1}{g_2}$), ở đó f_1, f_2 (tương ứng g_1, g_2) là các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{K}$ và không có không điểm chung. Khi đó

$$f' = \frac{f_1'f_2 - f_2'f_1}{f_2^2}, f" = \frac{(f_1"f_2 - f_2"f_1)f_2 - 2f_2'(f_1'f_2 - f_2'f_1)}{f_2^3}$$

$$\frac{f"}{f'} = \frac{(f_1"f_2 - f_2"f_1)f_2 - 2f_2'(f_1'f_2 - f_2'f_1)}{f_2(f_1'f_2 - f_2'f_1)}, \frac{f'}{f-1} = \frac{(f_1'f_2 - f_2'f_1)}{f_2(f_1 - f_2)} \qquad (2.2)$$

Tương tự

$$\frac{g"}{g'} = \frac{(g_1"g_2 - g_2"g_1)g_2 - 2g_2'(g_1'g_2 - g_2'g_1)}{g_2(g_1'g_2 - g_2'g_1)}; \frac{g'}{g-1} = \frac{(g_1'g_2 - g_2'g_1)}{g_2(g_1 - g_2)} \qquad (2.3)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3) chúng ta có, nếu a là một cực điểm nào đó của L, thì $f(a) = \infty$ hoặc $f'(a) = 0$ hoặc $f(a) = 1$ hoặc $g(a) = \infty$ hoặc $g'(a) = 0$ hoặc $g(a) = 1$. Bây giờ xét a là một cực điểm nào đó của L với $\mu_f^\infty(a) = 1$. Viết $f = \frac{f_3}{z-a}$, $f_3(a) \neq 0, f_3(a) \neq \infty$. Khi đó

$$F = \frac{1}{f-1} = \frac{z-a}{f_3 - (z-a)}; F' = \frac{f_3 - f_3'.(z-a)}{(f_3 - (z-a))^2}$$

$$F" = \frac{-f_3".(z-a)(f_3 - (z-a)) - 2(f_3' - 1)(f_3 - f_3'.(z-a))}{(f_3 - (z-a))^3}$$

$$\frac{F"}{F'} = \frac{-f_3".(z-a)(f_3 - (z-a)) - 2(f_3' - 1)(f_3 - f_3'.(z-a))}{(f_3 - (z-a))(f_3 - f_3'.(z-a))} \qquad (2.4)$$

Từ (2.4) ta suy ra $\frac{F"}{F'}(a) \neq \infty$. Do đó nếu a là một cực điểm nào đó của f hoặc g với $\mu_f^\infty(a) = \mu_g^\infty(a) = 1$, thì

$$L(a) = [\frac{F"}{F'}(a) - \frac{G"}{G'}(a)] \neq \infty \qquad (2.5)$$

Bây giờ xét a là một không điểm của $f - 1$ với $\mu_f^1(a) = m$. Do $\overline{E}_f(1) = \overline{E}_g(1)$ nên $g(a) = 1$ và $\mu_g^1(a) = n$. Viết

$$F = \frac{F_1}{(z-a)^m}, F_1(a) \neq 0, F_1(a) \neq \infty; G = \frac{G_1}{(z-a)^n}, G_1(a) \neq 0, G_1(a) \neq \infty$$

Khi đó

$$F' = \frac{F_1'(z-a) - mF_1}{(z-a)^{m+1}}$$

$$F" = \frac{[F_1"(z-a) + (1-m)F_1'](z-a) - (m+1)(F_1'(z-a) - mF_1)}{(z-a)^{m+2}}$$

Tương tự cho $G', G"$. Từ đó suy ra

$$\frac{F"}{F'} - \frac{G"}{G'} =$$

$$\frac{1}{z-a}[\frac{[F_1"(z-a) + (1-m)F_1'](z-a) - (m+1)(F_1'(z-a) - mF_1)}{F_1'(z-a)^{m+2}}$$
$$-\frac{(G_1"(z-a) + (1-n)G_1')(z-a) - (n+1)(G_1'(z-a) - nG_1)}{G_1'(z-a) - nG_1}]$$

Nếu $m = n = 1$ thì

$$\frac{F"}{F'} - \frac{G"}{G'} = \frac{1}{z-a}\frac{F_2\,(z-a)^2}{(F_1'(z-a) - F_1)(G_1'(z-a) - G_1)}$$
$$= \frac{F_2(z-a)}{(F_1'\,(z-a) - F_1)(G_1'(z-a) - G_1)}$$

và nếu $m = n \geq 2$, thì

$$\frac{F"}{F'} - \frac{G"}{G'} =$$

$$\frac{1}{z-a}[\frac{(F_1"(z-a) + (1-m)F_1')(z-a) - (m+1)(F_1'(z-a) - mF_1)}{F_1'(z-a) - mF_1}$$
$$-\frac{(G_1"(z-a) + (1-m)G_1')(z-a) - (m+1)(G_1'(z-a) - mG_1)}{G_1'(z-a) - mG_1}]$$

Từ các đẳng thức trên và L không đồng nhất 0, ta nhận được nếu $m = 1$ thì $L(a) = 0$ và nếu $m = n \geq 2$ thì $L(a) \neq \infty$. Từ điều này và (2.1)-(2.5) ta thấy rằng, nếu a là một cực điểm nào đó của L thì

$$f(a) = \infty \text{ với } \mu_f^\infty(a) \geq 2, \text{ hoặc} f(a) = 0,\ \mu_f^0(a) \geq 2, \text{ hoặc } f'(a) = 0$$

$$\text{hoặc } f(a) = 1, \text{ với } \mu_f^1(a) > \mu_g^1(a), \text{hoặc } g(a) = \infty \text{ với } \mu_g^\infty(a) \geq 2,$$

$$\text{hoặc } g(a) = 0,\ \mu_g^0(a) \geq 2, \text{hoặc } g'(a) = 0, \text{ hoặc } g(a) = 1, \text{với } \mu_g^1(a) > \mu_f^1(a) \qquad (2.6)$$

Từ (2.1) ta có

$$m(r, L) = O(1) \text{ và}$$

$$N^{\leq 1}(r, \frac{1}{f-1}) = N^{\leq 1}(r, \frac{1}{g-1}) \leq N(r, \frac{1}{L}) \leq T(r, L) + O(1) \leq N(r, L) \qquad (2.7)$$

Theo Định lý chính thứ hai ta có

$$T(r, f) \leq N_1(r, f) + N_1(r, \frac{1}{f}) + N_1(r, \frac{1}{f-1}) - N_0(r, \frac{1}{f'}) - \log r + O(1) \qquad (2.8)$$

Ở đó $N_0(r, \frac{1}{f'})$ là hàm đếm các không điểm của f' nhưng các không điểm này không phải của $f(f-1)$. Cũng định nghĩa tương tự $N_1(r, \frac{1}{f'})$, ở đó mỗi không điểm của f' được tính với bội 1. Tương tự

$$T(r, g) \leq N_1(r, g) + N_1(r, \frac{1}{g}) + N_1(r, \frac{1}{g-1}) - N_0(r, \frac{1}{g'}) - \log r + O(1) \qquad (2.9)$$

Từ (2.8) và (2.9) ta có

$$T(r,f)+T(r,g)\leq$$
$$N_1(r,f)+N_1(r,\frac{1}{f})+N_1(r,\frac{1}{f-1})-N_0(r,\frac{1}{f'})+N_1(r,g)+N_1(r,\frac{1}{g})$$
$$+N_1(r,\frac{1}{g-1})-N_0(r,\frac{1}{g'})-2\log r+O(1) \quad (2.10)$$

Từ $\overline{E}_f(1)=\overline{E}_g(1)$ và $N_1(r,\frac{1}{f-1})=N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})+N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{f-1})$ ta có

$$N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{f-1})\leq N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))+N_1(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)>\mu_f^1(a))$$
$$+N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)=\mu_f^1(a))$$

$$N_1(r,\frac{1}{f-1})+N_1(r,\frac{1}{g-1})\leq N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))$$
$$+N_1(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)>\mu_f^1(a))$$
$$+N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)=\mu_f^1(a))+N_1(r,\frac{1}{g-1})$$
$$\leq N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))+N(r,\frac{1}{g-1})$$
$$\leq N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))+T(r,g)$$

Từ đây và (2.10) ta có

$$T(r,f)\leq N_1(r,f)+N_1(r,\frac{1}{f})N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})-N_0(r,\frac{1}{f'})+$$
$$N_1(r,g)++N_1(r,\frac{1}{g})$$
$$+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))-N_0(r,\frac{1}{g'})-2\log r+O(1) \quad (2.11)$$

Từ (2.6) và (2.7) ta có

$$N^{\leq 1}(r,\frac{1}{f-1})\leq N(r,L)\leq N_1^{\geq 2}(r,f)+N_1^{\geq 2}(r,g)+N_{1,0}(r,\frac{1}{f'})+N_{1,0}(r,\frac{1}{g'})$$
$$+N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{f})+N_1^{\geq 2}(r,\frac{1}{g})+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))$$
$$+N_1(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)>\mu_f^1(a))+O(1) \quad (2.12)$$

Kết hợp (2.12) với (2.11) ta có

$$T(r,f)\leq N_2(r,f)+N_2(r,\frac{1}{f})+N_{2,g}((r,g))+N_2(r,\frac{1}{g})+N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)$$
$$+N_{1,g}(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)>\mu_f^1(a))-2\log r+O(1) \quad (2.13)$$

Mặt khác ta thấy

$$N(r,\frac{1}{f-1})-N_1(r,\frac{1}{f-1})+N(r,\frac{1}{f})-N_1(r,\frac{1}{f})\leq$$
$$N_1(r,\frac{1}{f'}),$$
$$N(r,\frac{1}{f'})\leq N_1(r,f)+N(r,\frac{1}{f})+O(1)$$

Chú ý rằng

$$N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))\leq N(r,\frac{1}{f-1})-N_1(r,\frac{1}{f-1})$$

Vì vậy

$$N_1(r,\frac{1}{f-1};\mu_f^1(a)>\mu_g^1(a))\leq N_1(r,f)-N_1(r,\frac{1}{f})+O(1)$$

Tương tự ta có

$$N_1(r,\frac{1}{g-1};\mu_g^1(a)>\mu_f^1(a))\leq N_1(r,g)-N_1(r,\frac{1}{g})+O(1)$$

Kết hợp với (2.13) ta nhận được Trường hợp 1.

Trường hợp 2. $L\equiv 0$. Chứng minh tương tự 2. của Bổ đề 2.2.

Chứng minh Định lý 1

Đặt

$$F=\frac{f^{n+1}}{a(n+1)},G=\frac{g^{n+1}}{a(n+1)}$$

Khi đó

$$F'=\frac{f^nf'}{a},G'=\frac{g^ng'}{a}$$

Ta có

$$N_2(r,\frac{1}{F'})\leq 2N_{1,f}(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f'})\leq$$
$$2T(r,f)+N(r,\frac{1}{f'})+O(1),\ N_2(r,F')=2N_1(r,f)$$
$$N_2(r,\frac{1}{G'})\leq 2N_1(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g'})\leq$$
$$2T(r,g)+N(r,\frac{1}{g'})+O(1),\ N_2(r,G')=2N_1(r,g)$$
$$2N_1(r,\frac{1}{F'})\leq 2N_1(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f'})\leq$$
$$2T(r,f)+N(r,\frac{1}{f'})+O(1),\ 2N(r,F')=2N_1(r,f)$$
$$N_1(r,\frac{1}{G'})\leq N_1(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g'})\leq T_g(r)+N_{g'}(0,r)+O(1),$$
$$N_1(r,G')=N_1(r,g)$$
$$N(r,\frac{1}{f'})\leq T(r,f)+N_1(r,f)+O(1)$$
$$N(r,\frac{1}{g'})\leq T(r,g)+N_1(r,g)+O(1) \quad (2.14)$$

Từ $\overline{E}_{f^nf'}(a)=\overline{E}_{g^ng'}(a)$ dẫn đến $\overline{E}_{F'}(1)=\overline{E}_{G'}$ (1)

$$(n-1)T(r,f)+N(r,\frac{1}{f'})+N(r,f)\leq T(r,F')+O(1) \quad (2.15)$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, Bổ đề 2.2 ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1.

$$T(r,F')\leq N_2(r,F')+N_2(r,\frac{1}{F'})+N_2(r,G')+N_2(r,\frac{1}{G'})+$$
$$2(N_1(r,F')+N_1(r,\frac{1}{F'}))+N_1(r,G')+N_1(r,\frac{1}{G'})-2\log r+$$
$$O(1)$$

Kết hợp với (2.14) và (2.15) ta có

$$(n-1)T(r,f)\leq 6T(r,f)+5T(r,g)+6N_1(r,f)+5N_1(r,g)-$$
$$N(r,f)-2\log r+O(1)$$

$(n-1)(T(r,f)+T(r,g)) \leq 21(T(r,f)+T(r,g))-4\ \log r+O(1)$

Khi đó

$$(n-22)(T(r,f)+T(r,g))+4\ \log r \leq O(1)$$

Khi $n \geq 22$ ta thấy mâu thuẫn.

Trường hợp 2. $F'G' = f^n f' g^n g' \equiv 1$.

Ta sẽ chứng minh $f \neq 0$ và $g \neq 0$. Giả sử rằng f có một không điểm a với $\mu_f^0(a) = m$. Khi đó a là một cực điểm của g với $\mu_g^0(a) = p$ do $f^n f' g^n g' \equiv 1$. Vì vậy $nm+m-1 = np+p+1$.

Do đó ta có $(m-p)(n+1) = 2$. Điều này là không thể xảy ra vì $n \geq 22$ và m, p là các số nguyên. Vì vậy $f \neq 0$ và $g \neq 0$. Do đó $f = \dfrac{1}{f_1}$, $g = \dfrac{1}{g_1}$, ở đó f_1, g_1 là các hàm nguyên khác hằng. Do $f^n f' g^n g' \equiv 1$, nên ta có

$$f_1' g_1' \equiv f_1^{n+2} g_1^{n+2} \tag{2.16}$$

Do $n \geq 22$, nên ta có

$$T(r, f_1' g_1') = T(r, f_1') + T(r, g_1') \leq T(r, f_1) + T(r, g_1) + O(1)$$
$$< T(r, f_1^{n+2}) + T(r, g_1^{n+2}) + O(1) \tag{2.17}$$

cho mọi r đủ lớn.

Từ (2.16) và (2.17), ta nhận được điều mâu thuẫn.

Trường hợp 3. $f^n f' \equiv g^n g'$.

Do đó ta có $f^{n+1} = g^{n+1} + c$. Ta sẽ chứng minh $c = 0$.

Giả sử ngược lại $c \neq 0$. Ta có phương trình $z^{n+1} + c = 0$ có $n+1$ nghiệm phân biệt $z_1, z_2, ..., z_{n+1}$. Với mỗi $i = 1, 2, ...n+1$, tất cả các không điểm của $g - z_i$ có bội ít nhất là $n+1$. Từ Định lý Quan hệ số khuyết ta có $(n+1)(1-\dfrac{1}{n+1}) < 2$. Từ đây suy ra $n < 2$. Do $n \geq 22$ ta có mâu thuẫn. Vậy $c = 0$. Do đó $f^{n+1} \equiv g^{n+1}$. Nên $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$. Định lý 1 được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] W.K. Hayman (1967), "Research Problems in Function Theory", *The Athlone Press University of London.*

[2] C.C. Yang and X.H. Hua (1997), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Ann.Acad.Sci.Fenn.Math*, pp.395-406.

[3] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for *p*-adic meromorphic functions", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp*, **38**, pp.71-92.

[4] P.C. Hu and C.C. Yang (2000), "Meromorphic functions over non-Archimedean fields", *Kluwer*, pp.33-46.

[5] Ha Huy Khoai (1983), "On p-adic meromorphic functions", *Duke Math. J*, **50** , pp.695-711.

[6] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2003), "Value distribution for p-adic hypersurfaces", *Taiwanese Journal of Mathematics*, **7(1)**, pp.51-67.

[7] M. Ru (2001), "A note on p-adic Nevanlinna theory", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**, pp.1263-1269.