

Mô hình giải tích đáp ứng khí động học của kết cấu mảnh theo phương tác động của gió

Nguyễn Đình Kha¹, Nguyễn Huy Cung^{2*}

¹Khoa Kỹ thuật xây dựng, Trường Đại học Bách khoa, Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh

²Khoa Kỹ thuật xây dựng, Trường Đại học Công nghiệp TP Hồ Chí Minh

Ngày nhận bài 10/3/2020; ngày chuyển phản biện 12/3/2020; ngày nhận phản biện 20/4/2020; ngày chấp nhận đăng 8/5/2020

Tóm tắt:

Các kết cấu mảnh đứng như cột ăng-ten, nhà cao tầng và tháp trụ thường rất nhạy cảm với tác động của gió, gây ra chuyển vị lớn do dao động. Do bản chất phức tạp của gió, việc đưa ra mô hình giải tích phù hợp để phân tích, đánh giá chính xác các đáp ứng khí động lực học của kết cấu mảnh là rất khó khăn. Những tiêu chuẩn hiện hành cung cấp nhiều mô hình khác nhau để tính toán các đáp ứng của kết cấu do tác động của gió nhưng bị giới hạn ở các giả thiết cơ bản. Bài báo này giới thiệu một mô hình giải tích mở rộng để tính toán đáp ứng chuyển vị của kết cấu mảnh đứng theo phương tác động của gió, trong đó có xét đến các tác động của các thành phần khác nhau của dòng rối khí quyển. Ví dụ số cho kết cấu thực tế sẽ minh họa cho phần lý thuyết và chỉ ra những hạn chế trong các cách tính toán phổ biến.

Từ khóa: dao động, dòng rối, kết cấu mảnh, khí động lực học, phương gió tác động.

Chỉ số phân loại: 2.1

Đặt vấn đề

Các kết cấu mảnh thẳng đứng với nhiều đặc điểm và chức năng khác nhau đã và đang được xây dựng ở khắp nơi trên thế giới, tạo thành một phần của di sản văn hóa và kiến trúc nhân loại. Tầm quan trọng của các kết cấu này đã đặt ra vấn đề về sự an toàn và bảo trì của nó. Do yêu cầu kiến trúc, công năng sử dụng và những tiến bộ trong khoa học vật liệu, các kết cấu ngày càng cao, càng thanh mảnh. Rất nhiều những nghiên cứu về dao động và đáp ứng động của kết cấu mảnh thẳng đứng do tác động của gió đã được thực hiện trên cơ sở kế thừa các kết quả nghiên cứu của ngành khí động lực học trong lĩnh vực hàng không, là những chủ đề chính của những nghiên cứu được phát triển trong lĩnh vực kỹ thuật gió hơn 60 năm qua. Nhiều phương pháp được thiết lập để tính toán đáp ứng của kết cấu mảnh chịu tác động của gió, bao gồm: công thức toán học, phương pháp giải tích, phương pháp số, thí nghiệm bằng hầm gió cũng như thí nghiệm toàn diện...[1]. Ưu điểm của ngành kỹ thuật gió là việc sử dụng chung nhiều phương pháp để cho ra được một kết quả hội tụ chính xác. Các thí nghiệm này đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm chứng và hoàn chỉnh lý thuyết tính toán dựa trên các mô hình và nhiều giả thiết đơn giản hóa, cung cấp các lời giải thực tế, cũng như góp phần tiên lượng những vấn đề mới có thể phát sinh trước thi công.

Việc nghiên cứu về đáp ứng của gió theo phương tác động (along-wind), đặc biệt là những kết cấu mảnh thẳng đứng (ví dụ như toà tháp, nhà chọc trời, cột điện, cột ăng-ten...) đã được bắt đầu tiến hành từ thập niên 1960 nhờ sự đóng góp tiên phong của Davenport [2, 3]. Với các nghiên cứu này, các tác giả đã tính các dạng dao động cơ bản và chuyển vị trung bình theo phương tác động của gió.

Nhiều mô hình sau này đã được đề xuất để cải tiến những nghiên cứu của Davenport. Tuy nhiên, các nghiên cứu này vẫn chưa hoàn thiện.

Các tiêu chuẩn thiết kế hiện hành sử dụng nhiều mô hình khác nhau để tính toán các đáp ứng của kết cấu do gió theo phương tác động [4, 5]. Trong đó, thành phần dòng rối vuông góc với phương tác động thường bị bỏ qua [6, 7]. Điều này giúp cho các kỹ sư thiết kế có được những công thức đơn giản hơn trong việc tính toán ứng xử của kết cấu do gió. Tuy nhiên, nó có thể dẫn tới kết quả thiếu chính xác vì các thành phần của dòng rối đều có thể tác động đến chuyển vị theo phương tác động.

Xuất phát từ những nhận xét ở trên, nghiên cứu này nhằm mục tiêu giải quyết những hạn chế của các nghiên cứu trước về việc tính toán chuyển vị theo phương gió (along-wind) của kết cấu mảnh thẳng đứng. Bên cạnh đó, bài báo sẽ mở rộng các mô hình lý thuyết trước đây thông qua việc xét các thành phần dòng rối thường bị bỏ qua trong các nghiên cứu và các tiêu chuẩn thiết kế chống gió. Lý thuyết phân tích phổ đáp ứng chuyển vị sẽ được áp dụng để xây dựng các công thức tính đáp ứng chuyển vị của kết cấu. Phương pháp số sẽ được dùng trong việc tính toán, áp dụng lý thuyết cho kết cấu cụ thể. Lý thuyết đề xuất được minh họa bằng ví dụ số cho một công trình thực tế và chỉ ra những hạn chế của các mô hình đang được sử dụng. Xét trong bối cảnh Việt Nam, việc nghiên cứu này cần thiết vì ngày càng có nhiều nhà cao tầng được xây dựng và các kết cấu mảnh như cột ăng-ten, cột điện, tháp truyền hình... rất phổ biến. Những kết cấu này rất nhạy cảm với gió và có biên độ dao động lớn. Do đó, việc tính toán thiết kế chống gió cho các kết cấu như vậy cần được chính xác hơn để đảm bảo an toàn cho kết cấu.

*Tác giả liên hệ: nguyenhuycong@iuh.edu.vn

Analytically modelling along-wind buffeting response of a slender column

Dinh Kha Nguyen¹, Huy Cung Nguyen^{2*}

¹Department of Civil Engineering, University of Technology, Viet Nam National University, Ho Chi Minh city

²Department of Civil Engineering, Industrial University of Ho Chi Minh city

Received 10 March 2020; accepted 8 May 2020

Abstract:

Slender vertical structures such as tall buildings, antenna masts, and towers are very sensitive to wind actions that give rise to large dynamic response. Due to the complex nature of wind turbulence, it is complicated to model analytically the wind-induced responses of slender structures. Current wind codes provide different models to evaluate dynamic responses but are limited to basic assumptions. This paper presents a general formulation to evaluate the buffeting displacement of slender vertical structures in the along-wind direction, considering the effects of different turbulent components. An application for a real structure will illustrate the theory and point out the limitation of conventional approaches.

Keywords: aerodynamics, along-wind, buffeting, slender structures, turbulence.

Classification number: 2.1

Nội dung nghiên cứu

Mô hình tính toán đáp ứng chuyển vị

Xem xét một kết cấu mảnh thẳng đứng có chiều cao H , bề rộng đón gió b , có tiết diện bất kỳ như hình 1 trong hệ trục tọa độ Decartes $Oxyz$. Trục z trùng với hướng của trục kết cấu. Kết cấu chịu tác động của gió có vận tốc tức thời $U(z, t)$ với góc tác động φ có thành phần vận tốc trung bình $\bar{U}(z)$ cùng hướng với trục x . Đối với kết cấu thẳng đứng, $U(z, t)$ có thể được biểu diễn bởi [2]:

$$U(z, t) = \bar{U}(z) + u'(z, t) + v'(z, t) \tag{1}$$

trong đó, $u'(z, t)$ là thành phần rối theo phương tác động $\bar{U}(z)$; $v'(z, t)$ là thành phần rối theo phương vuông góc với phương tác động $v'(z, t)$ động (cross-wind), t là thời gian.

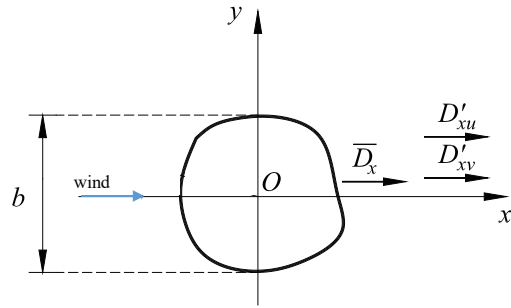
Phương trình chuyển động của hệ theo phương tác động của gió [8]:

$$M_1 \ddot{D}_x + D_x = \bar{D}_x + D'_x \tag{2}$$

$$D'_x(z, t) = \bar{D}_x + D'_x \tag{3}$$

trong đó \bar{D}_x là lực gió trung bình tác động theo phương x ; D_x là lực

gió theo phương x gây ra bởi dòng rối; V là chuyển vị theo phương x ; \dot{V} là vận tốc theo phương x ; \ddot{V} là gia tốc theo phương x ; k là độ cứng; c là hệ số cản; m là khối lượng của hệ.



Hình 1. Chuyển vị theo phương tác động của gió lên tiết diện một kết cấu.

Áp dụng giả thiết tính dừng trong dao động (quasi-steady theory) và $\bar{U}(z) \gg u'(t)$, $\bar{U}(z) \gg v'(t)$, lực tác động của gió như sau [2]:

$$\bar{D}_x = \frac{1}{2} \rho b \bar{U}^2(z) c_D \tag{4}$$

$$D'_x = D'_{xu} + D'_{xv} \tag{5}$$

$$D'_x = \rho \bar{U}(z) b c_D u'(t) + \frac{1}{2} \rho \bar{U}(z) b (c'_D - c_L) v'(t) \tag{6}$$

trong đó c_D và c_L lần lượt là hệ số khí động học đẩy (drag) và hút (lift); c'_D là đạo hàm của hệ số khí động học đẩy tương ứng góc tác động; ρ là tỷ trọng của khí quyển.

Do vậy, đối với kết cấu tuyến tính thì chuyển vị có thể được phân tích thành:

$$V(z, t) = \bar{V}(z) + V'(z, t) \tag{7}$$

trong đó $\bar{V}(z)$ và $V'(z, t)$ là thành phần chuyển vị gây ra bởi $\bar{D}_x(z)$ và $D'_x(z, t)$.

Giả thiết bề mặt nhám địa hình đồng nhất tại vị trí đang xét; phản ứng của kết cấu vẫn còn trong giai đoạn đàn hồi tuyến tính; dạng dao động riêng đầu tiên là ảnh hưởng đáng kể nhất; các dạng dao động riêng còn lại (bậc hai trở lên) xem như tác động không đáng kể. $V(z)$ có các kết quả như sau:

$$\bar{V}(z) = \frac{\int_0^H \bar{D}_x(z) \psi_1(z) dz}{M_1 (2\pi n_1)^2} \tag{8}$$

$V'(z, t)$ là hàm ngẫu nhiên theo thời gian. Nếu xem gió là một quá trình ngẫu nhiên có tính dừng, đồng nhất và ergodic thì các giá trị này có thể được xử lý theo lý thuyết dao động ngẫu nhiên được rút ra từ các giá trị phương sai [1]:

$$\sigma_x^2(z) = \int_0^\infty S_x(n) dn \tag{9}$$

trong đó $\psi_1(z)$ là dạng dao động riêng thứ 1 của kết cấu; n_1 là tần số riêng của kết cấu ở dạng dao động riêng thứ 1; M_1 là khối

lượng tương ứng dạng dao động thứ 1; $S_X(n)$ là phổ đáp ứng của $V'(z, t)$ trong miền tần số; $\sigma_X^2(z)$ là phương sai của chuyển vị theo phương x .

Áp dụng lý thuyết phân tích theo phổ, $S_X(n)$ có thể được tính toán như sau:

$$S_X(n) = \int_0^H \int_0^H \left\{ (\rho b c_D)^2 \bar{U}(z_1) \bar{U}(z_2) \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) S_{uu}(z_1, z_2; n) \right\} dz_1 dz_2 + \int_0^H \int_0^H \left\{ (\rho b)^2 (c'_D - c_L) c_D \bar{U}(z_1) \bar{U}(z_2) \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) S_{uv}(z_1, z_2; n) \right\} dz_1 dz_2 + \int_0^H \int_0^H \left\{ \frac{1}{4} [\rho b (c'_D - c_L)]^2 \bar{U}(z_1) \bar{U}(z_2) \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) S_{vv}(z_1, z_2; n) \right\} dz_1 dz_2 \quad (10)$$

trong đó $S_{ab}(z_1, z_2; n)$ là phổ của thành phần rời a' , b' , với $(a, b) = (u, v)$.

Đối với kết cấu thẳng đứng thì thành phần dòng rời u , v hầu như không tương quan (non-correlated) với nhau theo [2]. Do đó, công thức (9) được viết lại thành:

$$\sigma_{\text{max}}^2(z) = \sigma^2(u, z) + \sigma^2(v, z) \quad (11)$$

$$\sigma_{X(u)}^2(z) = \int_0^H \int_0^H \left\{ (\rho b c_D)^2 \bar{U}(z_1) \bar{U}(z_2) \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) S_{uu}(z_1, z_2; n) \right\} dz_1 dz_2 \quad (12)$$

$$\sigma_{\text{max}}^2(z) = \int_0^H \int_0^H \left\{ \frac{1}{4} [\rho b (c'_D - c_L)]^2 \bar{U}(z_1) \bar{U}(z_2) \psi_1(z_1) \psi_1(z_2) S_{vv}(z_1, z_2; n) \right\} dz_1 dz_2 \quad (13)$$

Lý thuyết tính giá trị cực đại của chuyển vị được cho bởi [8]. Giá trị cực đại của chuyển vị tại độ cao z sẽ bằng tổng chuyển vị trung bình và chuyển vị lớn nhất ở độ cao đó:

$$V_{\text{max}}(z) = \bar{V}(z) + g_X \cdot \sigma_X(z) \quad (14)$$

trong đó g_X là hệ số đỉnh (Peak factor) theo phương tác động x , xác định bởi lý thuyết phân bố cực trị tiệm cận.

Hàm phổ của các thành phần dòng rời

Hàm phổ $S_{uu}(z_1, z_2; n)$:

Phổ gió S_{uu} của thành phần rời u' được cho bởi [2, 9, 10]:

$$S_{uu}(z_1, z_2; n) = \text{coh}_{uu}(z_1, z_2; n) \sqrt{S_u(z_1, n) \cdot S_u(z_2, n)} \quad (15)$$

trong đó $S_u(z, n)$ là phổ vận tốc gió của thành phần rời theo phương x tại độ cao z ; $\text{coh}_{uu}(z_1, z_2, n)$ là hàm gắn kết (coherence function) của $S_u(z_1, n)$ và $S_u(z_2, n)$.

$$S_u(z, n) = \frac{4\chi^2}{[1 + \chi^2]^{4/3}} \frac{U_*^2}{n} \quad (16)$$

$$U_{*1} = \frac{k_a \bar{U}(z)}{\ln(z/z_0)} \quad (17)$$

$$\chi = \frac{1200 \cdot n}{U(10)} \quad (18)$$

$$\text{coh}_{uu}(z_1, z_2; n) = \exp \left\{ - \chi_{uu}(z_1, z_2) \frac{|z_1 - z_2|}{H} \right\} \quad (19)$$

$$K_{\chi_{uu}}(z_1, z_2; n) = \frac{2nc_{\chi_{uu}}H}{U(z_1) + U(z_2)} \quad (20)$$

trong đó U_* là vận tốc nhám bề mặt được điều chỉnh từ vận tốc nhám ứng với địa hình đồng cỏ U_{*1} với tỷ số U_*/U_{*1} được tra bảng theo [8]; k_a là hằng số Karman; Z_0 là chiều cao nhám bề mặt địa hình; $c_{\chi_{uu}}$ là hệ số tác động theo phương đứng theo phương tác động của gió; $\bar{U}(10)$ là vận tốc gió trung bình tại cao độ 10 m.

Hàm phổ $S_{vv}(z_1, z_2; n)$:

Phổ gió S_{vv} của thành phần rời v' được cho bởi [2, 9, 10]:

$$S_{vv}(z_1, z_2; n) = \text{coh}_{vv}(z_1, z_2; n) \sqrt{S_v(z_1, n) \cdot S_v(z_2, n)} \quad (21)$$

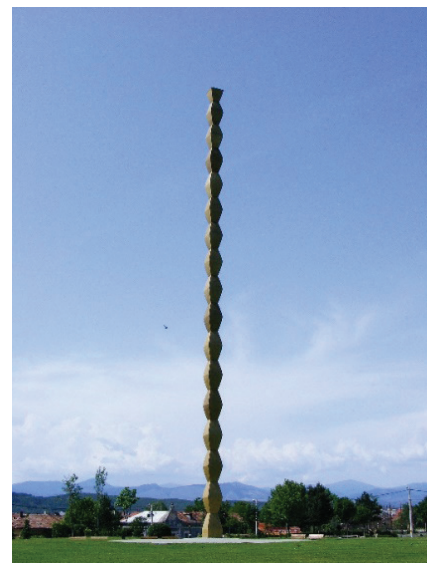
$$S_v(z, n) = \frac{17T}{[1 + 9,5T]^{5/3}} \frac{U_*^2}{n} \quad (22)$$

$$T = \frac{n \cdot z}{U(z)} \quad (23)$$

$\text{coh}_{vv}(z_1, z_2, n)$ tính tương tự như $\text{coh}_{uu}(z_1, z_2, n)$ trong công thức (19).

Ví dụ số

Lý thuyết đề xuất nêu trên được áp dụng để tính toán đáp ứng khí động lực học của công trình nổi tiếng “Endless Column” ở Romania chịu tác động của tải trọng gió [11] như hình 2. Bảng 1 và 2 tóm tắt các thông số kết cấu kỹ thuật chính, bảng 3 mô tả các thông số của gió tác động và địa hình.



Hình 2. Cột Endless Column. (Nguồn <http://www.romania-insider.com/>)

Bảng 1. Thông số kết cấu tháp Endless Column [11].

| Ký hiệu | Giá trị |
|---|----------------|
| Chiều cao kết cấu: H (m) | 29 |
| Bề rộng mặt đón gió: b (m) | 0,9 |
| Khối lượng công trình: M (tấn) | 31 |
| Tần số dao động riêng thứ 1: n_1 (Hz) | 0,513 |
| Dạng dao động riêng thứ 1: $\psi_1(z)$ | $(z/L)^{1,75}$ |

Bảng 2. Hệ số khí động lực học tương ứng góc tác động [11].

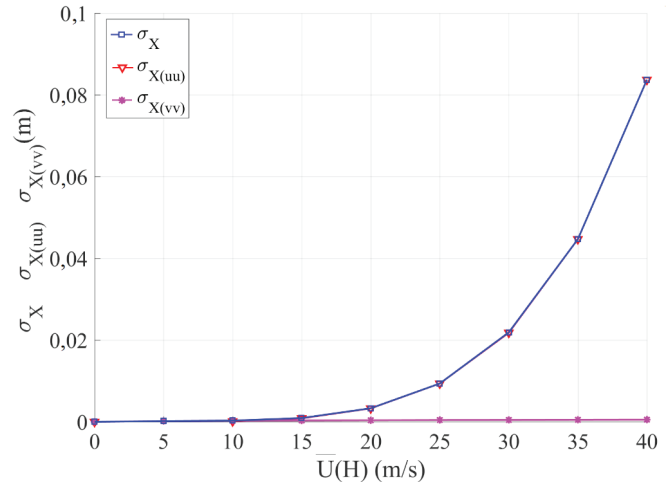
| Góc tác động φ | 0° | 5° | 45° |
|------------------------|-----------|-----------|------------|
| c_D | 1,093 | 1,087 | 1,503 |
| c_L | -0,0014 | -0,159 | 0,020 |
| c'_D | 0 | -0,060 | 0,062 |

Bảng 3. Thông số gió và địa hình [11].

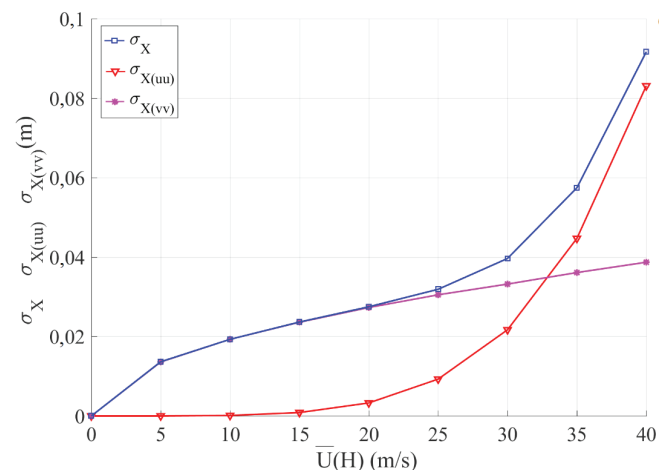
| Ký hiệu | Giá trị |
|---|---------------------------|
| Tỷ trọng khí quyển ρ (kg/m^3) | 1,225 |
| Chiều cao nhám địa hình z_0 (m) | 0,05 |
| Hàm vận tốc gió trung bình $\bar{U}(H)$ | $\bar{U}(z) (x/H)^{0,15}$ |
| Vận tốc gió tác động $\bar{U}(z)$ (m/s) | 0~40 |
| Hệ số tác động C_{zu} | 7 |
| Hệ số đỉnh g_x | 3,5 |

Kết quả và thảo luận

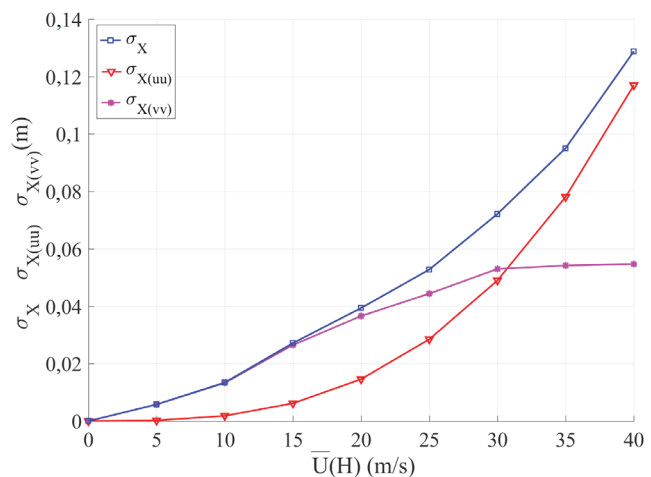
Hình 3, 4, 5 lần lượt thể hiện sự biến đổi của các giá trị $\sigma_{X(uu)}(H)$, $\sigma_{X(vv)}(H)$ và $\sigma_X(H)$ tại đỉnh công trình $z = H$ tương ứng ở các hướng tác động của gió $0^\circ, 5^\circ, 45^\circ$ khi $\bar{U}(H)$ thay đổi. Ở hình 3 với hướng gió tương ứng góc tác động bằng 0° , giá trị σ_X nằm gần trùng với giá trị $\sigma_{X(uu)}$, giá trị $\sigma_{X(vv)}$ rất nhỏ không đáng kể. Trong khi đó, theo hình 4 với góc tác động bằng 5° , giá trị $\sigma_{X(uu)}$ nhỏ hơn giá trị $\sigma_{X(vv)}$ ở vận tốc $\bar{U}(H) = 0 \sim 30$ m/s nhưng khi $\bar{U}(H) > 30 \sim 35$ m/s thì giá trị $\sigma_{X(uu)}$ lại bắt đầu vượt lên lớn hơn. Nhận xét này tương tự như ở hình 5 với góc tác động bằng 45° . Từ đó có thể nhận thấy vai trò của các thành phần rối u' và v' đối với chuyển vị kết cấu. Ở vận tốc gió càng lớn thì vai trò của u' càng đáng kể. Ngược lại, ở vận tốc gió nhỏ và vừa phải, vai trò của v' là quan trọng. Thành phần này thường bị bỏ qua trong các tiêu chuẩn chống gió.



Hình 3. Độ lệch của chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 0° .

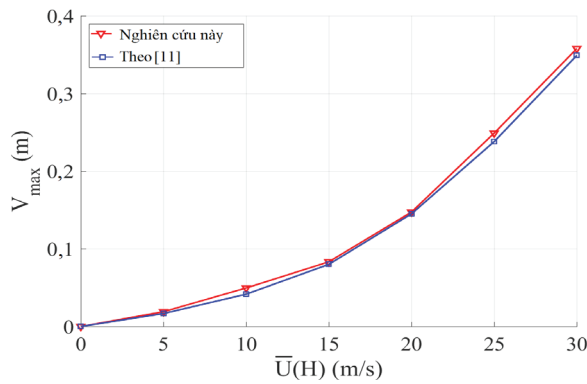


Hình 4. Độ lệch của chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 5° .

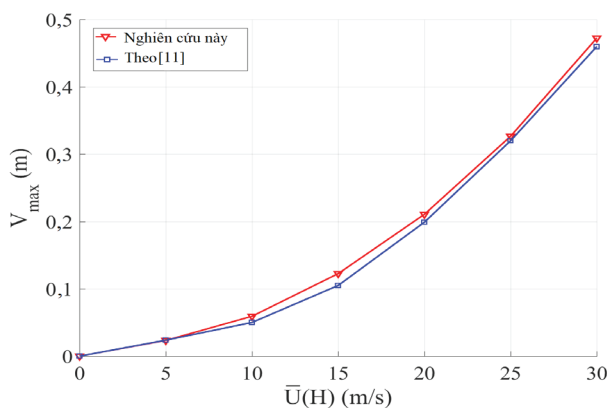


Hình 5. Độ lệch của chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 45° .

Hình 6, 7 so sánh chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 0 và 45° tính theo phương pháp của bài báo và nghiên cứu của Solari [11], cũng với tháp Endless Column và các thông số về gió và địa hình đã nêu ở trên. Nghiên cứu [11] chỉ xét đến ảnh hưởng của thành phần dòng khí rối theo phương gió u' (longitudinal turbulent component) đến chuyển vị theo phương tác động của gió và bỏ qua các thành phần khác của dòng rối. Kết quả so sánh cho thấy chênh lệch không đáng kể giữa hai phương pháp. Điều đó thể hiện mức độ chính xác của các tính toán trong nghiên cứu này. Mặt khác, vai trò của thành phần rối theo phương gió u' là đáng kể đối với chuyển vị, trong khi các thành phần khác có thể bỏ qua. Điều này hợp lý vì các góc 0 và 45° là các trục đối xứng của tiết diện kết cấu nên các hệ số khí động học C_D và C_L rất nhỏ, làm cho chuyển vị do thành phần rối v' là không đáng kể như thể hiện ở phương trình (13). Đối với các góc khác có C_D và C_L lớn hơn, vai trò của thành phần dòng rối v' đáng kể hơn như đã thảo luận ở trên.



Hình 6. So sánh giá trị cực đại của chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 0° giữa nghiên cứu [11] và của bài báo.



Hình 7. So sánh giá trị cực đại của chuyển vị tại đỉnh kết cấu ở góc 45° giữa nghiên cứu [11] và của bài báo.

Kết luận

Với cơ sở lý thuyết và ví dụ số đề cập, bài báo đã giới thiệu cách tính toán đáp ứng của kết cấu mảnh thẳng đứng theo phương tác động của gió, trong đó có xét đầy đủ vai trò của các thành phần dòng rối theo các phương khác nhau.

Ví dụ số áp dụng cho kết cấu thực tế đã chỉ ra vai trò rất quan trọng của thành phần khí rối theo phương vuông góc với hướng gió. Đối với kết cấu mảnh thẳng đứng, thành phần này thường bị bỏ qua khi tính đáp ứng chuyển vị theo phương tác động trong các tiêu chuẩn tính toán. Do đó, việc bỏ qua các thành phần khí rối như hiện nay có thể dẫn tới những kết quả không chính xác trong việc tính toán thiết kế kết cấu chống gió và có thể ảnh hưởng bất lợi đối với sự an toàn của kết cấu.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia (NAFOSTED) thông qua đề tài mã số 107.04-2017.321. Nhóm nghiên cứu xin trân trọng cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Kim, K. You, J. You (2014), “Across and along-wind responses of tall building”, *Journal of Central South University*, **21**, pp.4404-4408.
- [2] G. Solari, F. Tubino (2007), “Wind effects on buildings and design of wind-sensitive structures”, *International Centre for Mechanical Sciences*, New York, USA, pp.137-163.
- [3] A.G. Davenport (1961), “The spectrum of horizontal gustiness near the ground in the high wind”, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **87**, pp.194-211.
- [4] ASCE (2010), *Minimum design loads for buildings and other structures*, ASCE/SEI 7-10.
- [5] Eurocode 1 (1992), *Actions on structures - General actions - Part 1-4: Wind actions*.
- [6] E. Simiu (2011), *Design of buildings for wind. A guide for ASCE 7-10 Standard users and designers of special structures*, John Wiley & Sons.
- [7] I. Calotescu, and G. Solari (2016), “Alongwind load effects on free-standing lattice towers”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **155**, pp.182-196.
- [8] E. Simiu, R. Scanlan (1996), *Wind effects on structures - Fundamentals and application to design*, John Wiley & Sons.
- [9] G. Solari, G. Picardo (2001), “Probabilistic 3-D turbulence modeling for gust buffeting of structures”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **16**, pp.73-86.
- [10] G. Picardo, G. Solari (2002), “3D gust effect factor slender vertical structures”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **17**, pp.143-155.
- [11] G. Solari (2013), “Brancusi endless column: A masterpiece of art and engineering”, *Internal Journal of High-Rise Building*, **3(2)**, pp.193-212.