

MẤY VẤN ĐỀ NHẬN THỨC VỀ TOÁN HỌC

PHAN ĐÌNH DIỆU

Hơn hai nghìn năm trước, Pitago đã từng tự hỏi: « Những con số, chúng ở đâu? Tách rời bởi không gian, tự mình trú ngụ ở trên trời của các ý niệm? ». Còn Arixtôt thì khẳng định: « Toán học là một trừu tượng của cái cảm tính ». Trải qua hàng nghìn năm phát triển, toán học luôn luôn tìm cách tự ý thức về mình, tự xác định vị trí của mình trong nhận thức và trong những mối quan hệ phức tạp giữa ý thức và tồn tại. Ngày nay, cái « cực kì trừu tượng » của toán học đang ngày càng được ứng dụng rộng rãi và có hiệu quả vào các ngành khoa học, và hầu như nó đang thâm nhập vào mọi lĩnh vực của nhận thức. Nhưng cũng dễ thất vọng nếu như quá tin vào cái « sức nặng vạn năng » của các phương pháp toán học! Vì vậy, xác định rõ vị trí của toán học trong nhận thức, vạch ra cái mạnh và cái yếu của nó, cái khả năng và cái hạn chế của nó vẫn luôn luôn là vấn đề cần thiết. Dưới đây tôi xin trình bày một vài nhận thức về các vấn đề đó, cụ thể là:

- Đặc tính trừu tượng và hình thức của toán học.
- Vận động và biện chứng trong quan hệ với toán học.
- Cấu trúc và thuật toán trong toán học hiện nay.
- Vấn đề tiêu chuẩn chân lí của toán học.
- Vài ý nghĩ về sáng tạo trong toán học và ứng dụng toán học.

1. ĐẶC TÍNH TRỪU TƯỢNG VÀ HÌNH THỨC CỦA TOÁN HỌC

Trải qua nhiều giai đoạn phát triển, đối tượng trực tiếp của toán học cũng thay đổi và mở rộng dần: các hình và số của toán học sơ cấp, các đại lượng biến thiên và hàm

số của giải tích toán học trong những thế kỉ vừa qua, và các cấu trúc tổng quát của toán học ngày nay.

Về đối tượng của toán học, Engen có một ý kiến (tôi không muốn dùng chữ định nghĩa) nổi tiếng: « Đối tượng của toán học thuần túy là những hình dạng không gian và những quan hệ số lượng của thế giới hiện thực, tức là một tư liệu rất cụ thể. Tư liệu này biểu hiện dưới một hình thức cực kì trừu tượng, đó chỉ là một bức màn bên ngoài che lấp nguồn gốc của nó trong thế giới hiện thực » (1). Và tương cũng nên dẫn thêm một đoạn khác của Engen « ...Họ quên rằng toàn bộ cái mà người ta gọi là toán học thuần túy đều nghiên cứu những điều trừu tượng, rằng tất cả những đại lượng của họ, nói một cách chặt chẽ, đều là những đại lượng tưởng tượng và tất cả những sự trừu tượng đầy đến cực độ đều biến thành những điều vô nghĩa, những cái đối lập » (2).

Như vậy, khi xét đối tượng của toán học cần phải nhấn mạnh hai đặc điểm: nguồn gốc thực tiễn và tính biểu hiện cực kì trừu tượng của nó. Để hiểu toán học, cần hiểu đúng bản chất của sự trừu tượng trong toán học. Tất nhiên không phải chỉ có toán học mới sử dụng phép trừu tượng. Tư duy trừu tượng là cái nhất thiết đối với mọi nhận thức lí tính, nó được sử dụng trong mọi khoa học. Khoa học, các qui luật khoa học bao giờ cũng nhằm tới cái phổ biến, không phải vì không cần hiểu cái riêng mà chính bởi vì cái riêng, cái cụ thể, cái đơn nhất là không thể nhận thức

(1) Chống Duyrinh. Bản tiếng Việt, trang 64.

(2) Biện chứng của tự nhiên. Bản tiếng Việt, trang 432.

được trong tính toàn thể của nó, ta chỉ có thể nhận thức được cái cụ thể một cách tiệm tiến thông qua vô hạn những khái niệm, những qui luật có tính chất phổ biến.

Nhưng về mức độ, trừu tượng trong toán học có khác với trừu tượng trong các khoa học tự nhiên khác. Trong toán học, phép trừu tượng thoát ra khỏi mọi nội dung có tính chất chất liệu của sự vật, và chỉ giữ lại các quan hệ số lượng và hình dạng, tức là chỉ các quan hệ và cấu trúc mà thôi. Điều đó làm cho các khái niệm toán học có tính chất phổ biến hơn, tức là ít gần bó với các sự vật cụ thể hơn, và tạo cho toán học có khả năng tưởng tượng cao hơn và xa hơn. Trong toán học có những khái niệm là kết quả của sự trừu tượng hóa trực tiếp từ nhận thức cảm giác, từ kinh nghiệm và khảo sát, nhưng có nhiều khái niệm là kết quả của sự lý tưởng hóa — tức là sự trừu tượng hóa không xuất phát từ thực tiễn mà từ những kết quả của những trừu tượng hóa trước đó. Số ảo, các không gian nhiều chiều, vô hạn thực tại, các cấu trúc tôpô, đại số, v.v... là những khái niệm như vậy.

Với bản chất trừu tượng đó, toán học trở thành một bộ phận của tư duy. Mà tư duy của chúng ta thì « không thể hình dung sự vận động mà không cắt đứt tính liên tục của nó, không đơn giản hóa, không làm thô lỗ, không tách rời, không giết chết cái gì đang sống » (1). Nói cách khác, tư duy của chúng ta có tính chất hình thức, hay đúng hơn, ta chỉ có khả năng tư duy hình thức, vì vậy các phương pháp toán học là các phương pháp của tư duy hình thức. Lôgic hình thức, các phương pháp suy diễn hình thức là lôgic chính thống, lôgic nội tại của toán học.

Lôgic hình thức lấy những qui luật đồng nhất, qui luật loại trừ cái thứ ba, qui luật mâu thuẫn, ... làm cơ sở của mình. Đó cũng là những qui luật cơ bản của lôgic toán học. Những qui luật của phép biện chứng (mâu thuẫn và thống nhất giữa các mặt đối lập, phủ định cái phủ định, lượng chuyển hóa thành chất...) có những ảnh hưởng, những tác động đến quá trình phát triển nhận thức toán học, và theo những cách nào đó có thâm nhập vào toán học, nhưng không phải là lôgic bên trong của toán học. Qui luật mâu thuẫn của lôgic hình thức đòi hỏi mọi quá trình tư duy phải phi mâu thuẫn, đó cũng là đòi hỏi của các lý thuyết toán học. Từ thời Aristot đến nay, lôgic hình thức có phát triển, nhưng yêu cầu phi mâu thuẫn vẫn là yêu cầu cốt thiết. Yêu cầu đó không phải là yêu cầu của sự phát triển biện chứng, nhưng là một yêu

cầu của tư duy. Bằng yêu cầu đó, chúng ta làm khô héo, « giết chết những gì đang sống », nhưng không thể nào khác được, bởi vì tư duy của chúng ta không có khả năng nào khác hơn là « giết chết những gì đang sống » để dần dần đi đến nhận thức được cái sống một cách tiệm tiến!

Tích cực kì trừu tượng của các khái niệm và đối tượng nghiên cứu, tính hình thức triệt để của các phương pháp luận lí là những đặc điểm của toán học. Nhưng dù ở mức độ cao, cái trừu tượng và hình thức đó cũng chỉ là một đặc điểm của hoạt động tư duy trong việc nhận thức thực tiễn. Đằng sau các khái niệm trừu tượng là các quan hệ và cấu trúc của thế giới hiện thực, dù rằng mối quan hệ đó nhiều khi có thể rất xa xôi và gián tiếp. Nhu cầu nhận thức thực tiễn luôn luôn là nguồn cung cấp các nguyên hình cho việc hình thành các khái niệm trừu tượng của toán học. Từ các khái niệm hình, số, cho đến các loại cấu trúc toán học hiện nay đều đã được hình thành dựa trên những đòi hỏi của việc nhận thức thực tiễn, của khoa học kĩ thuật.

Khi nói đến nguồn gốc thực tiễn của toán học, cũng cần nhấn mạnh cả nguồn gốc thực tiễn của chính các qui luật lôgic hình thức. Đây là thực tiễn nhận thức. Lênin viết: « Hoạt động thực tiễn của con người đã phải làm cho ý thức của con người lặp đi lặp lại hàng nghìn lần những cách lôgic khác nhau để làm cho những cách này có thể có ý nghĩa những công lí » (1).

Lẽ tất nhiên, với những đặc điểm nói trên, sự phát triển của toán học có tính độc lập tương đối của nó. Không phải nhất nhất mọi định lí toán học đều phải biểu hiện những mặt nào đó của các quan hệ trong thế giới hiện thực, và không phải nhất nhất ở mỗi bước phát triển, toán học đều phải quay về kiểm nghiệm những kết quả của mình trong thực tiễn. Những tính độc lập tương đối đó cũng không có nghĩa là toán học có thể là sản phẩm thuần túy của tư duy tách rời mọi quan hệ của thế giới khách quan. Cái độc lập nội tại tương đối của toán học là cái độc lập của tư duy trừu tượng. Tư duy trừu tượng hướng đến cái khái quát, cái phổ biến, bằng tư duy ta đi tìm qui luật, mà qui luật chính là cái phản ánh — dù là cái phản ánh yền lĩnh, theo Hêgen — của thế giới hiện thực. Do vậy mà các lý thuyết toán học đã có,

(1) Lênin, *Bút kí triết học*, Bản tiếng Việt, trang 211.

dù gần hay xa, cuối cùng đều có thể tìm thấy những ứng dụng trong khoa học kỹ thuật. Điều đó không phải là ngẫu nhiên, vì nói cho cùng, toán học chỉ là một chặng đường trên con đường dài «từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng, rồi lại từ tư duy trừu tượng trở về với thực tiễn» của nhận thức như Lênin đã chỉ rõ.

Trừu tượng và khái quát hóa là một vũ khí mạnh của nhận thức, của tư duy, nhưng đồng thời nó cũng chứa những yếu tố làm phiền diện, xuyên tạc hiện thực, bởi vì «trong sự khái quát hóa đơn giản nhất, trong ý niệm chung cơ bản nhất (cái «bản» nói chung) đã có một phần nhất định nào đó của ảo tưởng»(1). Cái mầm mống ảo tưởng đó càng có điều kiện được nuôi dưỡng trong quá trình phát triển toán học, và là nguồn gốc của mọi quan điểm duy tâm trong việc nhìn nhận toán học. Những quan điểm đó — bằng cách này hay cách khác — đều tìm cách gán cho toán học cái nguồn gốc từ bản thân trí tuệ (và trí tuệ như là một tồn tại tách rời khỏi thế giới khách quan) hoặc từ một lực lượng thần bí nào đó.

Chủ nghĩa duy danh và thực chứng luận của Caenap, xem cái phổ biến chỉ còn như các thuật ngữ, các kí hiệu. Nó chặn mất con đường đi đến hiểu sự trừu tượng toán học như là phản ánh các quan hệ hiện thực. Tiếp thu cái tinh thần thực chứng luận đó, chủ nghĩa hình thức của Hinbe xem «toán học là học thuyết về các quan hệ giữa các công thức đã bị tước hết mọi nội dung», và cho rằng các nhà toán học sáng tạo ra các khái niệm và các tiên đề một cách tiên thiên, không cần quan tâm đến việc chúng có phù hợp với thực tế hay không. Bulor (Boole), Căngto (Cantor), Poăngcarê (Poincaré), Buôcbaki (Bourbaki),... cũng có những quan điểm tương tự. Poăngcarê đã từng tuyên bố: «Các môn toán học đều tuyệt đối độc lập đối với việc người ta sử dụng nó trong thực nghiệm. Chúng là những sáng tạo độc đoán của trí tuệ, là sự biểu hiện rõ ràng nhất của khả năng sáng tạo của bản thân trí tuệ» (2).

Chủ nghĩa duy lý từ Đécac, Lepnitxơ, Spinôza,... xem rằng cái bảo đảm cho tính phổ biến và tất yếu của tri thức là do có một «trực quan trí tuệ» nào đó. Lepnitxơ viết «chúng ta đã đạt đến các chân lí phổ biến và tất yếu của khoa học từ chính những gì có trong chúng ta» (3). Sau này, tiếp thu tinh thần của cái «trực quan trí tuệ» đó, chủ nghĩa trực quan trong toán học của Braoơ (Brouwer), Vâyin (Weyl), Hâytin (Heyting) xem rằng nguồn gốc

duy nhất của toán học là trực quan. Theo Hâytin, «các đối tượng toán học được rút ra trực tiếp từ tinh thần đang tư duy, do đó các tri thức toán học không phụ thuộc vào kinh nghiệm» (4).

Rutxen với chủ nghĩa lôgic đã từng tìm cách biến toán học thành một bộ phận của lôgic, xem rằng toán học là tổ hợp của các suy diễn, chúng có thể thích dụng với bất kì cái gì, nghĩa là thích dụng với mọi thể giới «có thể có» — và do đó cũng không có một quan hệ gì với thế giới thực tế quanh ta.

Khác với các quan điểm trên, chủ nghĩa kinh nghiệm với Bacon, Lôccơ, Hium coi nhẹ vai trò của tư duy trừu tượng trong nhận thức, xem rằng các tư tưởng toán học mà con người có được là nhờ các giác quan, trí não chúng ta giống như một bảng trắng, trên đó kinh nghiệm và khảo sát liên tục điền vào những hiểu biết và sắp xếp lại thành hệ thống kiến thức. Chủ nghĩa kinh nghiệm đã đưa Zonne, Coruc đi đến khẳng định sự tồn tại thực tế của các số ảo, của các không gian nhiều chiều, và do đó đã đi thẳng đến dị đoan, đến thần linh học hiện đại, như Engen đã từng kịch liệt phê phán trong cuốn «Biện chứng của tự nhiên».

Tách rời toán học, tách rời tư duy trừu tượng ra khỏi toàn bộ quá trình nhận thức nói chung, thì chắc chắn sẽ sa vào các quan điểm sai lầm. Ta chỉ có thể hiểu đúng bản chất của toán học khi ta hiểu đúng vị trí của nó trong toàn bộ quá trình nhận thức, mà quá trình này là «từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng rồi lại từ tư duy trừu tượng trở về với thực tiễn». Toán học chỉ là một chặng đường, chứ cũng không phải là toàn bộ con đường khúc khuỷu và phức tạp đó, vì vậy, với quan điểm nhận thức luận biện chứng, ta cũng không sợ nói rõ rằng đối tượng trực tiếp của các lí thuyết toán học có nguồn gốc là thực tiễn nhưng đồng thời là sản phẩm của tư duy trừu tượng, và lôgic nội tại, cơ sở luận lí của các lí thuyết toán học là lôgic hình thức. Điều đó nói rõ cái yếu và cái mạnh của toán học. Với tư duy trừu tượng ta nhắm tới cái qui luật, cái phổ biến. Qui

(1) Lênin, *Bút kí triết học*. Bản tiếng Việt, trang 211

(2) Lênin, *Bút kí triết học*. Bản tiếng Việt, trang 396.

(3) Poincaré, *Science et méthode*, 1910.

(4) Xem trong tập «*Triết học của khoa học tự nhiên*». Viện hàn lâm Khoa học Liên-xô, 1966 (tiếng Nga).

luật là cái phản ánh *yên tĩnh* của thế giới hiện thực, nhưng đồng thời « qui luật là hiện tượng có tính bản chất » (Hêgen) (1). Toán học cho ta hiểu biết thế giới về những khía cạnh nào đó, về những mặt « bản chất » nào đó. Nhưng toán học không cho ta bức tranh của thế giới trong toàn thể của nó. Và ta cũng không nên hi vọng trong tư duy của chúng ta có được cái bức tranh như vậy.

2. VẬN ĐỘNG VÀ BIỆN CHỨNG TRONG QUAN HỆ VỚI TOÁN HỌC

Ta hãy trở lại với một giai đoạn phát triển sôi nổi và rực rỡ của toán học, đó là giai đoạn của phép tính vi tích phân và giải tích toán học. Như đã biết, sự ra đời của các đại lượng biến thiên và phép tính vi tích phân đã thực sự là một bước ngoặt trong toán học, và như Engen đã nhận xét, « nhờ nó mà *vận động*, và cả *biện chứng* đã đi vào toán học » (2), và « chỉ có phép tính vi phân mới đem lại cho khoa học tự nhiên khả năng miêu tả bằng toán học không chỉ những trạng thái, mà cả những quá trình : sự vận động » (3).

Giải tích toán học có những khái niệm cơ bản là đại lượng biến thiên, hàm số, giới hạn, liên tục, v.v... Rõ ràng là toán học đã nghiên cứu sự vận động trong những khía cạnh rất cơ bản của nó !

Engen xem rằng khi nghiên cứu các đại lượng biến thiên, « bản thân toán học đã bước vào lĩnh vực của phép biện chứng rồi » (4). Quả thực, trong lập luận của giải tích toán học có những yếu tố của phép biện chứng. Đề đo được độ dài của đường cong, ta phải xem cong là giới hạn của những cái thẳng, như vậy cong là cong mà vừa là thẳng, hay chẳng hạn khi tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1, \text{ ta đã xem } x \text{ vừa khác } 0,$$

lại vừa là 0, x ở đây được xét trong sự vận động trong trạng thái biến đổi.

Ở đây có một vấn đề khá tế nhị : để trở thành một công cụ đắc lực của khoa học kỹ thuật, toán học nhất thiết phải nghiên cứu sự vận động. Và khi nghiên cứu vận động, rõ ràng có những yếu tố của phép biện chứng thâm nhập vào các phương pháp toán học. Nhưng phải chăng điều đó sẽ trái với điều khẳng định ở đoạn trên nói rằng lôgic bên trong của toán học là lôgic hình thức ? Ta hãy kiên nhẫn trở lại với những diễn biến trong mấy thế kỷ vừa qua của giải tích toán học để tìm cách lý giải vấn đề này.

Từ thế kỷ 17 đến thế kỷ 19, giải tích toán học đã phát triển một cách khá đặc sắc : trong khi các tầng của tòa lâu đài ngày một vươn cao nguy nga tráng lệ, thì oái oăm thay, nền móng của nó vẫn chưa có gì là vững chãi. Người ta có thể giải nhiều phương trình vi phân phức tạp, nhưng vẫn không biết định nghĩa thế nào là một đại lượng vô cùng bé, thậm chí thế nào là một số thực. Nhiều nhà toán học đã nhận thấy sự khủng hoảng cơ sở này, và trước tình hình đó, có những nhà toán học như Hadama (Hadamard) đã từng tuyên bố : « Cứ tiến lên phía trước, rồi lòng tin sẽ theo sau ». Hêgen cũng nhận xét : « Toán học... cho đến nay vẫn chưa chứng minh được bằng bản thân mình, nghĩa là một cách toán học, những phép tính dựa trên cơ sở những phép biến đổi đó (phép vi tích phân) và như vậy là vi phép biến đổi đó không có tính chất toán học » (5).

Vậy, bản chất của sự khủng hoảng đó trong cơ sở của giải tích toán học là ở đâu ? Đó là cái khủng hoảng giữa *yêu cầu phản ánh cái vận động và mâu thuẫn với đòi hỏi nội tại của toán học là hình thức và phi mâu thuẫn* !

Và đến cuối thế kỷ 19, toán học đã tìm ra cách giải quyết cho sự khủng hoảng này bằng sự ra đời của *lý thuyết tập hợp* của Căngto. Dựa trên những khái niệm của lý thuyết tập hợp, người ta đã tìm được các định nghĩa hợp pháp cho các khái niệm như số thực, giới hạn, liên tục, v.v... Đứng về mặt nhận thức luận, hạt nhân của lý thuyết tập hợp là sự trừu tượng hóa *vô hạn thực tại*. Sự trừu tượng hóa này cho phép tư duy của chúng ta có quyền hình dung cái vô hạn như là một thực thể toàn vẹn, hoàn chỉnh, trong đó mọi phần tử của nó được xem là tồn tại một cách đồng thời và bình đẳng. Căngto viết : « Nói chung tôi hiểu tập hợp là một cái gì rất nhiều nhưng có thể nghĩ như một cái thống nhất, tức là mọi tập hợp các phần tử xác định được liên hệ với nhau trong một toàn thể thống nhất bởi một qui luật nào đó ». Nhà toán học Ludin (Лужин) giải thích rõ thêm : Trong lý thuyết tập hợp hầu như người ta không vạch một biên giới nào cả giữa các tập hợp hữu hạn và vô hạn. Cũng giống như các tập hợp hữu hạn có thể được cho một

(1) Heyting. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*, 1934.

(2) Xem « *Bút ký triết học* » của Lênin, trang 167.

(3) *Biện chứng của tự nhiên*, trang 408.

(4) *Biện chứng của tự nhiên* trang 434.

(5) *Chống Duyrinh*, trang 266.

cách toàn vẹn và đầy đủ, các tập hợp vô hạn cũng coi như là được cho trong tất cả các toàn vẹn và đầy đủ của nó, trong dạng *hoàn chỉnh*, bao gồm tất cả vô hạn các phần tử của nó. Cái vô hạn như thế bất biến, bất động và đóng kín trong nó. Đó là vô hạn thực tại» (1).

Sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại cũng đi kèm với sự tuyệt đối hóa tính phổ biến của các qui luật lôgic hình thức. Trong toán học với lý thuyết tập hợp, người ta sử dụng các qui luật lôgic hình thức khi lập luận trên cái hữu hạn cũng như trên cái vô hạn. Trừu tượng hóa vô hạn thực tại và tuyệt đối hóa lôgic hình thức là câu trả lời cho cuộc khủng hoảng kéo dài nói trên của giải tích toán học. Với cơ sở này, ta định nghĩa số thực như là một tập hợp (vô hạn thực tại) các số hữu tỉ thỏa mãn một quan hệ hình thức nào đó, khái niệm giới hạn «đại lượng biến thiên y tiến đến giới hạn b khi đại lượng x tiến đến giới hạn a » được định nghĩa bởi quan hệ: «Với mọi $\varepsilon > 0$ có δ sao cho khi $|x - a| < \delta$ thì $|y - b| < \varepsilon$ », v.v... Hãy xem! Ta chỉ còn lại các quan hệ hình thức, và đâu là bóng dáng của vận động và biện chứng? Toán học đã tiếp nhận như thế đó các yếu tố của biện chứng. Nó cố gắng tìm ra kiểu tiếp nhận riêng của nó bằng cách bắt vận động và biện chứng chui qua các quan hệ hình thức. Và hẳn ta cũng rõ rằng khi đi qua cái cửa hình thức ấy, vận động và biện chứng đã bị tước bỏ biết bao nhiêu những nội dung phong phú của mình.

Vấn đề vô hạn, vô hạn như một quá trình hay như một thực tại hoàn chỉnh, từ lâu đã là một phạm trù của triết học. Từ Hêraclit (Heraclide) «người ta không thể hai lần tắm trên cùng một dòng sông» (và cũng không thể tắm một lần trong đó!) và Zênon (Zénon) với các nghịch lý nổi tiếng, vô hạn đã là một đối tượng quan trọng của nhận thức triết học. Phép biện chứng dạy ta rằng chỉ có thể nhận thức đúng đắn cái vô hạn trong cả quá trình thống nhất các mặt đối lập và phủ định cái phủ định của vận động. Cái vô hạn là một mâu thuẫn, và nó tồn tại trong mâu thuẫn, không có cái vô hạn mà chỉ là vô hạn, cũng như không có cái hữu hạn mãi mãi chỉ là hữu hạn. «Cái vô hạn và hữu hạn không tách rời nhau, chúng là một, cái hữu hạn chỉ là sự vượt quá bản thân mình, do đó cái hữu hạn bao hàm cái vô hạn như cái khác của bản thân nó» (Hêgen). Như vậy trong nhận thức biện chứng về vận động, thì vận động là sự thống nhất và chuyển hóa lẫn nhau của các mặt đối lập: liên tục và gián đoạn, hữu hạn và vô hạn, v.v...

Thế nhưng trong toán học cái vô hạn, và cả vận động, phải đáp ứng đòi hỏi phi mâu thuẫn. Sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại xem vô hạn như một cái gì bất biến, bất động, đem đối lập hoàn toàn cái vô hạn và cái hữu hạn, chúng phủ định nhau một cách hình thức đủ rằng chúng cùng bình đẳng trước tư duy. Như vậy, khi nghiên cứu các đại lượng biến thiên, có những yếu tố của phép biện chứng đã thâm nhập vào toán học, nhưng toán học đã tìm cách hợp thức hóa sự thâm nhập đó bằng cách mở rộng sự trừu tượng của mình để bảo vệ tính hình thức và phi mâu thuẫn. Bằng cách đó, tức là bằng lý thuyết tập hợp và sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại, toán học đã chấp nhận cái vận động, nhưng là chấp nhận theo cái cách của tư duy trừu tượng, tức là chấp nhận sau khi đã làm khô héo những gì tươi tốt, đã làm chết cứng những gì đang sống, làm như vậy để nhằm đi đến hiểu cái sống, cái vận động về những khía cạnh nào đó, một cách sâu sắc hơn nhưng đồng thời cũng phiến diện hơn.

Tuy nhiên, mở rộng sự trừu tượng để bảo vệ tính phi mâu thuẫn hình thức, toán học không thể đạt được mục đích tự giải quyết lấy những khó khăn của mình. Vì mở rộng sự trừu tượng là đưa thêm vào những yếu tố mới của ảo tưởng, đưa thêm khả năng tách rời hiện thực. Cái khó khăn tạm thời được giải quyết, nhưng thực tế chỉ là được chuyển chỗ chứ không phải được thủ tiêu. Một khó khăn lớn của toán học xây dựng trên cơ sở trừu tượng hóa vô hạn thực tại là khó khăn về sự tồn tại thuần túy mà ta sẽ nói ở phần sau. Yêu cầu phi mâu thuẫn là một mơ ước nội tại của toán học, nhưng toán học chưa bao giờ và sẽ không bao giờ tự chứng minh được tính phi mâu thuẫn của mình. Đó là những khó khăn có tính bản chất, những khó khăn trên con đường phát triển biện chứng của toán học.

Các lý thuyết toán học đòi hỏi tính hình thức và phi mâu thuẫn trong nội bộ chúng, nhưng bản thân sự phát triển của toán học—như một ngành của nhận thức—thì lại tuân theo những qui luật biện chứng của sự phát triển. Trong quá trình phát triển của mình, toán học đã từng đi từ các lý thuyết riêng rẽ đến các cấu trúc khái quát, đã từng có sự chuyển hóa và thâm nhập lẫn nhau giữa các lý thuyết về hữu hạn và vô hạn, vô hạn thực

(1) Xem «Bút kí triết học» của Lênin, trang 232

(1) Xem trong tập «Triết học của Khoa học tự nhiên». Viện hàn lâm Khoa học Liên xô, 1966 (tiếng Nga)

tại và vô hạn tiềm năng, liên tục và rời rạc, cấu trúc và thuật toán, v.v... ; và từ cái rời rạc của toán học sơ cấp qua liên tục rồi trở về cái rời rạc, hiện nay rõ ràng không phải chỉ là phủ định cái phủ định một cách hình thức.

3. CẤU TRÚC VÀ THUẬT TOÁN HỌC HIỆN NAY

Lý thuyết tập hợp, với sự khẳng định tính chính thống của trừu tượng hóa vô hạn thực tại và tính phổ biến của lôjic hình thức, đã giải quyết một giai đoạn khủng hoảng trong cơ sở toán học. Sau khi lý thuyết tập hợp ra đời, trong vài chục năm đầu của thế kỷ 20, bản thân lý thuyết đó đã trải qua những cơn sóng gió trầm trọng do việc phát hiện ra nhiều nghịch lý trong chính khái niệm tập hợp. Tuy nhiên, bằng nhiều cách hạn chế đối với khái niệm tập hợp, đặc biệt với cách tiên đề hóa lý thuyết tập hợp (với các hệ tiên đề của Zermelo — Fränken Zermelo, Froenkel), Becnait (Bernays) v.v..., những nghịch lý đó được khắc phục và người ta vẫn có thể sử dụng lý thuyết tập hợp với tư cách là cái nền của các lý thuyết toán học.

Với lý thuyết tập hợp, ta thấy rằng mọi khái niệm như tương quan hàm số, giới hạn, liên tục, v.v... đều có thể diễn tả bởi những quan hệ hình thức. Và vì vậy, lý thuyết tập hợp không những cho toán học cách giải quyết những khó khăn từ trước, mà còn mở ra cho toán học khả năng nghiên cứu một cách nhất quán mọi loại phép toán, mọi loại quan hệ và cấu trúc ở mức độ rất khái quát. Một cấu trúc được xác định bởi một số tập nền và các phép toán, và quan hệ trên các tập đó. Mà với lý thuyết tập hợp, thì các phép toán và quan hệ, xét đến cùng cũng chỉ là những tập hợp con nào đó mà thôi. Như vậy, về nguyên tắc có thể thống nhất các lý thuyết toán học trong một hệ thống các cấu trúc xây dựng trên cơ sở lý thuyết tập hợp.

Một điển hình của việc kiến trúc toán học theo hướng đó là hệ thống Bôcbaki (1). Trên một sơ đồ bậc thang thống nhất kiến tạo nên cái nền tập hợp cho mọi cấu trúc toán học, mỗi loại cấu trúc cụ thể được cho bởi một đặc trưng định hình T xác định loại hình của các quan hệ cơ bản trong cấu trúc và một quan hệ R chuyển vận được đối với định hình T xác định hệ tiên đề của loại cấu trúc đó. Các lý thuyết toán học đã có đều có thể sắp xếp vào những bậc thang tương ứng trong cái sơ đồ thống nhất của các cấu trúc đó, và thực ra chúng chỉ mới chiếm vài ba bậc thang đầu

tiên. Tuy nhiên, không nhất thiết phải nghiên cứu tất cả mọi cấu trúc, vì các cấu trúc dùng trong toán học có thể xây dựng từ một số ít các cấu trúc mẹ (đại số, tôpô, thứ tự) bằng những phép chồng chất.

Sơ đồ khái quát đó cho ta một bức tranh thống nhất về các cấu trúc toán học. Và trên cơ sở đó, lý thuyết của mỗi cấu trúc toán học đều có thể xây dựng một cách tiên đề hóa và hình thức hóa, nghĩa là xây dựng sao cho việc rút ra các định lý chỉ còn là một việc suy diễn tuân theo một vài qui tắc cú pháp xuất phát từ hệ tiên đề của lý thuyết bao gồm các tiên đề của lôjic hình thức và các tiên đề toán học của lý thuyết.

Rõ ràng là có lý do để nói « toán học ngày nay là toán học của các cấu trúc » như Bôcbaki, Vương Hạo,... đã từng khẳng định.

Tuy nhiên, cái lâu đài cân đối và đẹp đẽ đó của toán học cũng chưa phải là hoàn mỹ. Bên trong những cấu trúc được sắp xếp tinh xảo đó vẫn chứa đựng nhiều mầm mống của sự rạn nứt. Một khó khăn lớn của các lý thuyết toán học xây dựng trên cơ sở lý thuyết tập hợp là khó khăn về sự tồn tại. Người ta đã chứng minh được hàng loạt các định lý về sự tồn tại) nhưng là sự tồn tại thuần túy, nghĩa là khẳng định rằng một đối tượng nào đó là có, nhưng có ở đâu, làm sao để tìm ra nó thì không biết. Các định lý về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, tồn tại của hàm số ẩn, của điểm bất động, của các giá trị trung bình, v.v... là những định lý thuộc loại đó.

Nguyên nhân của cái khó khăn về sự tồn tại thuần túy đó nằm ngay trong lòng nền móng cơ bản của toán học, nói rõ hơn là nằm ngay trong sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại và việc công nhận tính phổ biến của các qui luật lôjic hình thức. Ví dụ, với lôjic hình thức, ta có qui tắc suy diễn

$$\neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \exists x P(x) \quad (*)$$

(nếu không phải mọi x đều không có tính chất P thì ắt có một x nào đó có tính chất P). Dùng qui tắc đó ta có thể suy ra sự tồn tại của một đối tượng x có tính chất P, nếu ta chứng minh được rằng phán đoán « mọi x đều không có tính chất P » là không đúng. Nghĩa là từ phủ định của một phán đoán phổ biến ta suy ra điều khẳng định của một phán đoán đặc thù. Dĩ nhiên, nếu x nằm trong một tập hợp hữu hạn, thì sự tồn tại suy ra từ qui tắc đó về nguyên lý là có thể tìm kiếm được. Nhưng nếu x nằm trong một tập hợp vô hạn thì sự

(1) Bôrbaki. *Théorie des ensembles*. Paris, 1960.

thể lại khác, bằng qui tắc đó ta « chứng minh » được sự tồn tại, nhưng thông thường là sự tồn tại không kèm theo phương pháp tìm kiếm.

Cái « tồn tại thuần túy » như vậy đã từng làm đẹp lòng những nhà toán học trừu tượng, từng là niềm say mê của những trí tưởng tượng, nhưng thực tế là một khó khăn của toán học.

Bởi vì thế nào là tồn tại? Và lấy tiêu chuẩn gì để đánh giá tính hợp lý của một quan điểm về tồn tại? Trong toán học, tồn tại tức là sự tồn tại của các đối tượng toán học, tức là các khái niệm trừu tượng của tư duy. Nhưng giá trị của toán học phải là ở chỗ nó phản ánh những mặt nào đó của thực tiễn, và vì vậy, sự tồn tại của những đối tượng trừu tượng của toán học, thông qua con đường trở về với thực tiễn của nhận thức, phải được thể hiện thành sự tồn tại của các đại lượng vật lý nào đó. Vậy thì, sự tồn tại phỏng còn có ý nghĩa gì khi sự tồn tại đó không kèm theo một phương pháp tìm kiếm?

Nhược điểm nói trên của sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại đã được nhiều nhà toán học đầu thế kỷ 20 chú ý và phê phán. Poängcaré nói: « Toán học chân chính phải là cái toán học mà ở đó người ta không bị ngập vào trong vũng lầy của vô hạn thực tại » (1). Đối lập với trường phái hình thức của Hinbe muốn bảo vệ toàn bộ toán học kinh điển trên cơ sở vô hạn thực tại và lôgic cổ điển bằng cách hình thức hóa các lý thuyết toán học, trường phái trực quan của Braoơ, và sâu đó là Vâyin, Hâytin đã công kích kịch liệt cơ sở nói trên, tức là công kích sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại và công kích tính phổ biến của các qui luật lôgic hình thức cổ điển. Thay thế cho sự trừu tượng hóa vô hạn thực tại, trường phái trực quan đòi hỏi rằng trong toán học chỉ được sử dụng sự trừu tượng hóa về *vô hạn tiềm năng*, nghĩa là vô hạn chỉ được xem như một khả năng trong quá trình xây dựng, chứ không phải như một thực tại hoàn chỉnh. Braoơ viết: « Cần phải xem dãy số tự nhiên được xây dựng số này tiếp số khác, chính đó là khả năng mở ra vô hạn, nó luôn luôn ở trong trạng thái trưởng thành chứ không phải là một vương quốc kín mít của sự vật tồn tại trong nó (2). Đối với lôgic hình thức cổ điển, trường phái trực quan kịch liệt phê phán một số qui luật, đặc biệt là qui luật loại trừ cái thứ ba ($A \vee \neg A$), vì từ qui luật này sẽ đẻ ra những qui luật hình thức về phủ định cái phủ định ($\neg \neg A = A$) hay qui luật (*) nói trên, tức là những qui luật làm cơ

sở cho sự tồn tại thuần túy. Thay thế cho các qui luật lôgic cổ điển, trường phái trực quan đề nghị chỉ cho phép sử dụng trong toán học những phép suy diễn trực quan dựa trên những quan niệm mới về các liên kết lôgic như « có », « không », « hay là », v.v... « Có » một đối tượng nào đó trong toán học nghĩa là phải tìm được một phương pháp để xây dựng đối tượng đó.

Một bước tiến quan trọng của sự phát triển toán học là việc ra đời các lý thuyết thuật toán vào những năm 30 của thế kỷ này với Göden (Gödel), Hecbrăng (Herbrand), Klini (Kleene), Turin (Turing), Pôx (Post), Sôc, (Church) v.v... Các lý thuyết thuật toán đã góp phần xây dựng cơ sở lý luận cho việc chế tạo và hoàn thiện dần các máy tính điện tử, phát triển các ngành toán học tính toán. Kết hợp với các phê phán của trường phái trực quan, lý thuyết thuật toán đã tạo tiền đề cho việc ra đời và phát triển các hướng *toán học kiến thiết* (Klini, Gutstainơn (Goodstein) Maccôp, Sanin, v.v...). Trong toán học kiến thiết, đối tượng nghiên cứu phải là những đối tượng kiến thiết tuân theo những qui luật xây dựng xác định, và trong quá trình xây dựng chúng không được sử dụng phép trừu tượng hóa vô hạn thực tại mà chỉ được phép sử dụng phép trừu tượng về vô hạn tiềm năng, các qui luật lôgic xét tính đúng đắn của các phán đoán trên mỗi loại đối tượng phải phù hợp với quá trình xây dựng loại đối tượng đó. Chẳng hạn, sự tồn tại phải được chứng thực bởi một thuật toán, ví dụ phán đoán $\forall x \exists y R(x,y)$ (với mọi x có y sao cho $R(x,y)$), được xem là đúng khi xây dựng được một thuật toán để theo đó với mỗi x tìm ra được y tương ứng sao cho $R(x,y)$. Nói chung, xét đến cùng, mỗi phán đoán toán học đều được giải thích và chứng thực bằng một thuật toán tương ứng nào đó.

Với những quan điểm nói trên, nhiều qui luật của lôgic cổ điển (loại trừ cái thứ ba, phủ định kép, qui luật (*) ở trên,...) không còn có tính phổ biến nữa, nghĩa là chúng có thể đúng trong một số trường hợp này và không đúng trong những trường hợp khác.

Quan điểm kiến thiết trên cơ sở thuật toán cho phép ta đi sâu vào bản chất phức tạp của các đối tượng toán học, nghiên cứu các đối tượng với đầy đủ cấu trúc thông tin của chúng, và là cơ sở lý luận tốt cho khoa

(1) Poincaré. *Science et méthode*, 1910.

(2) Xem Kleene. *Introduction to metamathematics*. New York, 1952.

học tính toán. Đồng thời cũng cần chú ý rằng lôjic của toán học kiến thiết tuy có khác với lôjic hình thức cổ điển, nhưng nó vẫn là hình thức. « Vô hạn tiềm năng » không biện chứng hơn « vô hạn thực tại », vì nó vẫn là tuyệt đối hóa một mặt, vẫn chỉ là một hình ảnh phản diện, hình thức và phi mâu thuẫn của vô hạn thực tế. Và nếu như toán học kiến thiết cho ta khả năng đi sâu vào sự phức tạp trong cấu trúc thông tin của các đối tượng toán học, thì đồng thời nó lại không có được cái khả năng rộng rãi của sự trừu tượng để nghiên cứu các cấu trúc dưới dạng tự do và khái quát của nó !

Như vậy là ngày nay bên cạnh toán học kinh điển vẫn phát triển mạnh mẽ, ta có toán học kiến thiết, cùng với cấu trúc ta có thuật toán. Chúng đối lập nhau, nhưng bổ sung cho nhau, ta không nên tuyệt đối hóa cái này và coi thường cái kia. Trong ứng dụng thực tiễn hiện nay, cấu trúc và thuật toán là hai mặt liên quan mật thiết với nhau, cơ sở của các phương pháp mô hình hóa và thuật toán hóa của điều khiển học. Ta cần có cái rộng rãi, cái tự do, cái lãng quên những điều phức tạp vụn vặt khi hình dung những mô hình, những cấu trúc khái quát; nhưng đồng thời cũng cần có cái tỉ mỉ, cái chu đáo, cái tính toán khi xét đến sự phức tạp của từng đối tượng, từng bài toán và từng quá trình tính toán. Vả chăng, ngày nay với sự phát triển nhanh chóng của kĩ thuật máy tính điện tử, nghĩa của chữ « tính toán » đang ngày càng mở rộng cùng với sự mở rộng việc tự động hóa các quá trình chế biến thông tin, và qua đó, cả các quá trình lao động trí óc, lao động sáng tạo. Nghiên cứu các thuật toán và độ phức tạp tính toán chính là một con đường đi sâu vào bản chất phức tạp và cấu trúc thông tin của các đối tượng toán học, và thông qua đó, bản chất phức tạp của các đối tượng thực tế.

4. VẤN ĐỀ TIÊU CHUẨN CHÂN LÝ CỦA TOÁN HỌC

Vấn đề tính chân lý của toán học — cũng như đối với các ngành khoa học khác — là một vấn đề cơ bản của triết học về toán học. Ta có nhiều lí thuyết toán học, vậy thế nào là một lí thuyết toán học đúng ?

Nhận thức luận duy vật biện chứng dạy ta rằng, không thể tìm tiêu chuẩn chân lý của một khoa học bên trong bản thân khoa học đó, rằng thực tiễn là tiêu chuẩn chân lý của mọi khoa học.

Tuy nhiên, do tính cực kì trừu tượng và hình thức của toán học, nhiều nhà toán học từ xưa đến nay đã nhầm lẫn xem rằng có thể định nghĩa cái đúng trong toán học, tức là cho — một cách toán học — định nghĩa tiêu chuẩn chân lý trong toán học.

Do tính hình thức của mình, nên tất yếu là mọi lí thuyết toán học phải thỏa mãn yêu cầu *phi mâu thuẫn*. Tuyệt đối hóa yêu cầu đó, nhiều nhà toán học đã đồng nhất hóa tính phi mâu thuẫn và tính chân lý của toán học; như vậy đối với họ, chân lý trong toán học là sự phi mâu thuẫn hình thức, là sự phù hợp lôjic nội tại của toán học. Poăngcarê nói: « Toán học không phụ thuộc vào sự tồn tại của vật chất, trong toán học chữ tồn tại chỉ có một nghĩa, đó là sự phi mâu thuẫn ». Hinbe, người đã đề ra chương trình bảo vệ toán học kinh điển bằng cách hình thức hóa và chứng minh tính phi mâu thuẫn của các hệ hình thức, đã xem việc chứng minh tính phi mâu thuẫn là cách giải quyết cuối cùng vấn đề chân lý trong toán học.

Tất nhiên, đồng nhất tính phi mâu thuẫn với tiêu chuẩn chân lý của toán học là trái với quan điểm biện chứng về nhận thức, nhưng tạm thời coi tính phi mâu thuẫn là một yêu cầu « chân lý » của toán học, ta hãy xem toán học đã giải quyết vấn đề đó ra sao.

Một phương pháp chứng minh tính phi mâu thuẫn có tính chất ngữ nghĩa lần đầu tiên đã được Hinbe sử dụng một cách đặc sắc để chứng minh tính phi mâu thuẫn của hình học phi Oclit. Cách chứng minh ngữ nghĩa đại thể như sau: Cho một lí thuyết tiên đề hóa A. Ta tìm cho A một mô hình trong một lí thuyết B, như vậy các phán đoán của A được giải thích thông qua các phán đoán của B. Nói cách khác, ta xác định một ánh xạ f sao cho với mỗi phán đoán P của A, $f(P)$ là một phán đoán của B, và: f bảo toàn các quan hệ lôjic (chẳng hạn $f(1P) = 1f(P)$), nếu P là định lí của A thì $f(P)$ là định lí của B. Từ đó nếu lí thuyết B phi mâu thuẫn thì lí thuyết A phi mâu thuẫn !

Theo phương pháp này, người ta đã chứng minh được rằng nếu hình học Oclit phi mâu thuẫn thì hình học Lôbasepxki phi mâu thuẫn, nếu số học các số thực phi mâu thuẫn thì hình học Oclit phi mâu thuẫn, và nếu lí thuyết tập hợp phi mâu thuẫn thì số học các số thực phi mâu thuẫn, v.v...

Ta thấy ngay rằng phương pháp mô hình này vấp phải một khó khăn thật sự, vì nó không thể đi đến tận cùng.

Những năm đầu của thế kỉ 20, với việc hình thức hóa triệt để các lí thuyết toán học, Hinbe

đưa ra một phương pháp mới có tính chất cú pháp để chứng minh tính phi mâu thuẫn.

Sau khi hình thức hóa, một lý thuyết toán học trở thành một hệ thống kí hiệu hình thức, mà các định lý của nó chỉ còn là các hàng kí hiệu được rút ra theo những qui tắc có tính chất cú pháp. Và lý thuyết là phi mâu thuẫn nếu theo các qui tắc đó không thể rút ra đồng thời hai hàng kí hiệu A và $\neg A$ (không A). Đối với số học hình thức hóa, thì điều đó cũng tương đương với điều nói rằng mệnh đề « $0=1$ » không phải là định lý. Vấn đề dường như rất đơn giản: để chứng minh số học là phi mâu thuẫn thì chỉ cần chứng minh rằng từ hệ số học hình thức không thể rút ra « $0=1$ » như là định lý! Để chứng minh điều đó, Hinbe đề nghị dùng các phương pháp của một lý thuyết «siêu toán học» với những hạn chế trong cái gọi là hữu hạn luận (finitism).

Tuy nhiên, một điều đáng buồn cho chương trình của Hinbe, mà cũng là một điều đáng mừng cho toán học là vào những năm 30, Gorden, một nhà toán học lỗi lạc, đã chứng minh được các định lý làm kinh ngạc giới toán học, cụ thể là các định lý sau đây:

1) Nếu số học hình thức hóa phi mâu thuẫn thì nó không đầy đủ (tức là có những điều đúng trong số học mà lý thuyết số học hình thức hóa không chứng minh được).

2) Nếu số học hình thức hóa phi mâu thuẫn thì tính phi mâu thuẫn của nó không phải là một định lý của nó (tức là nó không thể chứng minh được tính phi mâu thuẫn của nó!).

Cách chứng minh các định lý đó nằm trong phạm vi siêu toán học hữu hạn mà cơ sở là lý thuyết thuật toán (hay các hàm đệ qui). Vắn tắt như sau:

Bằng cách số học hóa lý thuyết thuật toán, ta có thể xây dựng một tân từ đệ qui $T(i, a, x)$ với nội dung: $T(i, a, x)$ đúng khi và chỉ khi thuật toán có số hiệu i khi tính trên số a thì sẽ dừng sau x bước.

Vì mọi tân từ đệ qui đều biểu diễn được trong hệ số học hình thức hóa N , nên trong N có công thức C_a biểu diễn mệnh đề $\exists x T(a, a, x)$, tức là

C_a chứng minh được trong $N \leftrightarrow \exists x T(a, a, x)$. Nếu lý thuyết N phi mâu thuẫn, thì $\neg C_a$ chứng minh được trong $N \rightarrow \neg \exists x T(a, a, x)$. Ta xây dựng một thuật toán M_p với số hiệu p sao cho với mọi a , M_p thích dụng cho a khi và chỉ khi có một chứng minh của $\neg C_a$ trong N (điều đó làm được vì tập hợp các chứng minh là đệ qui kể được). Ta có:

$\exists x T(p, a, x) \leftrightarrow \neg C_a$ chứng minh được

trong N . Từ đó dễ suy ra rằng cả C_p , cả $\neg C_p$ đều không chứng minh được trong N , và do đó định lý 1) được chứng minh.

Để chứng minh định lý 2) ta xây dựng một thuật toán M_r với số hiệu r sao cho với mọi a , M_r thích dụng cho a khi và chỉ khi có một chứng minh của « $0=1$ » trong N . Tính phi mâu thuẫn của lý thuyết N chính là $\neg \exists x T(r, r, x)$, tức được biểu diễn trong N bởi công thức C_r . Trong N người ta chứng minh được rằng

$$C_r \rightarrow \neg C_p$$

Do đó, vì $\neg C_p$ không chứng minh được nên C_r không chứng minh được. Và như vậy định lý 2) của Gorden được chứng minh.

Như thế là, một lý thuyết toán học không thể tự chứng minh được tính phi mâu thuẫn của mình. Các định lý Gorden có một ý nghĩa to lớn vượt ra ngoài phạm vi của toán học, nó khẳng định những quan điểm biện chứng về nhận thức toán học, chúng có nghĩa là:

1) Không thể hình thức hóa một cách đầy đủ các lý thuyết toán học. Nhận thức toán học phải phát triển không ngừng.

2) Tính chân lý của toán học — dù có hiểu đó là tính phi mâu thuẫn đi nữa — không thể chứng minh được bằng chính toán học, mà phải tìm ở ngoài toán học!

Ta nhớ rằng sau khi công bố các định lý Gorden, rất nhiều nhà toán học đã đi từ sự ngỡ ngàng đến bối rối, nhưng quả thực các định lý đó là một cống hiến vô giá đối với toán học và đối với khoa học về nhận thức nói chung.

Tính phi mâu thuẫn là một yêu cầu nội tại của mọi tư duy lý luận, do đó là yêu cầu nội tại của các lý thuyết toán học. Nhưng tuyệt nhiên nó chưa phải là tiêu chuẩn chân lý của toán học. Tiêu chuẩn chân lý của toán học trong tính phi mâu thuẫn hình thức, hay trong các trực quan trí tuệ (kiểu Brauer), hay trong cái tính chân lý phổ biến của lôjic (kiểu Rutxen) đều là luận quẩn, và đều xa rời cách hiểu đúng đắn của tiêu chuẩn chân lý trong khoa học. Nhưng điều đặc sắc ở đây là, các quan điểm biện chứng về tiêu chuẩn chân lý của toán học, dưới những dạng đặc biệt của nó, đã được chứng minh bằng chính toán học. Và phải chăng có thể nói rằng toán học tự thức được tính hạn chế của mình?

5. VÀI Ý NGHĨA VỀ SÁNG TẠO TRONG TOÁN HỌC VÀ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC

Đây là những vấn đề lớn, trong phạm vi bài báo này tôi chỉ xin trình bày một vài nhận thức nhỏ.

Ta đã nói rằng lôjic hình thức là lôjic nội tại của toán học. Và rõ ràng là mọi lý thuyết toán học, mọi định lý toán học đều có thể được trình bày hoàn toàn bằng các phép suy diễn của lôjic hình thức. Tuy nhiên, việc sáng tạo trong toán học, việc phát hiện các định lý mới có ý nghĩa (chứ không phải là mọi cái « mới » nói chung) của toán học thì lại đòi hỏi những phương pháp phong phú hơn là những phương pháp của lôjic hình thức. Sự sáng tạo trong toán học thực ra không khác nhiều lắm với sự sáng tạo trong các khoa học khác, ở đây có dự đoán, qui nạp, mò mẫm. Sáng tạo mang tính chất gợi mở (heuristic), chứ không mang tính chất thuật toán (algorithmic). Cái cách mà người ta nghĩ ra một định lý khác với cái cách người ta trình bày định lý đó, bởi vì không phải ta cần tất cả mọi « định lý » như nhau, mà ta cần những định lý có ý nghĩa. Mà việc quyết định xem một định lý có ý nghĩa hay không thì lại không phải là việc của cái lôjic hình thức nội tại của toán học.

Dĩ nhiên, sáng tạo trong khoa học là một quá trình phát hiện chân lý. Dường như trong chân lý nào cũng có một hạt nhân đơn giản của nó, và phải chăng bởi thế mà ta thường ngạc nhiên vì cái đơn giản của những kết quả mà ta tìm ra. Nhưng cái đơn giản đó cũng thường chỉ được phát hiện sau nhiều quá trình xử lý cái phức tạp. Và nghệ thuật của sự sáng tạo phải chăng là cái bản lĩnh nhìn nhận được cái đầu mối đơn giản trong muôn nghìn hiện tượng rối rắm và phức tạp. Kiến thức phong phú và khả năng tư duy trừu tượng giúp cho người nghiên cứu hình thành nên cái bản lĩnh đó. Trong nghiên cứu sáng tạo toán học, không có cái bản lĩnh đó thì cùng lắm cũng chỉ để ra được các kết quả có tính chất bắt chước, chứ không thể để ra các tư tưởng là nguồn gốc của các kết quả độc đáo. Các tư tưởng, hay các ý lớn là cái vô cùng quan trọng trong sáng tạo. Poăngcarê nói: « Tư tưởng chỉ là một ánh chớp, nhưng ánh chớp ấy chính là tất cả ».

Vì vậy, đầu toán học là trừu tượng và hình thức hóa hơn bất kỳ khoa học nào khác, sự sáng tạo trong toán học và trong các khoa

học khác thực ra có rất nhiều điểm chung. Enxten từng nói: « Trong tư duy khoa học luôn luôn có chất thơ. Âm nhạc chân chính và khoa học chân chính đòi hỏi cùng một quá trình tư duy giống nhau ». Sự phóng khoáng của tâm hồn, sự tự do của tư tưởng không chỉ là yêu cầu của sáng tạo nghệ thuật, mà cũng là yêu cầu của sáng tạo toán học.

Ngày nay hơn bao giờ hết, toán học đang mở rộng phạm vi ứng dụng của mình. Cùng với khoa học về thông tin và điều khiển, toán học đang được ứng dụng rộng rãi không những trong khoa học kỹ thuật mà cả trong các ngành của khoa học xã hội và khoa học về sự sống. Tư tưởng cấu trúc của toán học là phần cốt lõi quan trọng của toán học trong việc hình thành và phát triển quan điểm hệ thống — một quan điểm rất quan trọng của khoa học ngày nay. Tư tưởng cấu trúc, quan điểm hệ thống cùng với các phương pháp thuật toán là cái bảo đảm toán học cho việc ứng dụng vào mọi lĩnh vực thực tiễn. Trong mối quan hệ giữa toán học và ứng dụng thực tiễn, có trường hợp qua sự phát triển nội tại của mình toán học đã chuẩn bị nhiều kiến thức cho ứng dụng, nhưng đồng thời ứng dụng luôn luôn là nguồn cung cấp tư liệu cho việc hình thành các lý thuyết mới, các cấu trúc mới của toán học.

Tuy nhiên, cần chú ý rằng trong ứng dụng toán học, cái trừu tượng và hình thức của toán học quyết định cái mạnh và cái yếu của toán học. Các phương pháp toán học chắc chắn là có ích, nhưng tuyệt đối hóa chúng là nguy hiểm, bởi vì các lĩnh vực ứng dụng như ngôn ngữ, xã hội, kinh tế, sinh học v.v... không phải chỉ thuần túy có các mối quan hệ hình thức, các cấu trúc hình thức, và vì thế chỉ bằng cách nghiên cứu các quan hệ hình thức hẵn sẽ đi đến những kết luận phiến diện. Nhìn nhận đúng tác dụng của toán học, xác định rõ vị trí của nó trong nhận thức sẽ giúp ta phát huy được những cái mạnh của toán học, đồng thời không sử dụng một vũ khí mạnh trong những mặt mà nó không mạnh. Điều đó luôn luôn là một công việc khó khăn và phức tạp.