

Học tập triết học duy vật biện chứng để nâng cao sức sáng tạo của toán học

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Lâu nay, ở một số người làm công tác khoa học nói chung và nghiên cứu toán học nói riêng vẫn có một thắc mắc: « Học tập triết học duy vật biện chứng thì có lợi gì cho việc nâng cao sức sáng tạo của các bộ môn khoa học cụ thể? Các nhà khoa học tư sản với nhân sinh quan, thế giới quan phi Macxit sao người ta cũng sáng tạo giỏi vậy? Hình như chúng ta chỉ mới dùng thế giới quan Mác — Lênin để giải thích lịch sử phát triển khoa học, mà chưa dùng được thế giới quan đó vào việc tăng hiệu suất học tập, giảng dạy, nghiên cứu khoa học.

Với một « số kinh nghiệm ít ỏi của bản thân trong việc học, dạy và nghiên cứu toán học trong bài báo này, tôi xin góp một phần, chắc là còn hết sức nhỏ bé, vào việc giải đáp thắc mắc nói trên.

Nhìn lại lịch sử toán học, chúng ta thấy hình như chỉ có một vài ví dụ về những phát minh toán học mà nguyên nhân quyết định là do nhà toán học có một thế giới quan đúng đắn, và một vài ví dụ khác về sự chậm trễ, sự cản trở trong việc phát minh toán học mà nguyên nhân chính là do nhà toán học có một thế giới quan không đúng: Demôcrit, nhà triết học duy vật thời cổ Hi-lạp, cho rằng vật chất gồm những phần tử nhỏ. Quan điểm tiến bộ đó về vật chất đã dẫn ông tới ý nghĩ dùng cách chia nhỏ ra để tính diện tích và thể tích: đó chính là mầm mống của các phép tính vi phân và tích phân. Lôbasepxki nhờ có một quan điểm triết học tiến bộ về không gian, coi không gian là một hình thức tồn tại của vật

chất, nên đã phát minh ra hình học phi ơclit. Cômôgôrôp nhờ có quan điểm duy vật biện chứng về ngẫu nhiên và tất nhiên mà tiên đề hóa tính xác suất Lămbe, Xắcêni thì lại chính vì quan điểm triết học sai lầm mà đã nhường vinh quang cho Lôbasepxki. Đơdec-jindă gần khám phá ra các số siêu hạn nhưng vì vẫn tin rằng thế giới có lúc bắt đầu và do đó không tin ở vô tận thực tại nên đã bỏ qua. Thần học cũng đã ngăn cản Căngtơ xây dựng một lý thuyết tổng quát về tập hợp. Ông bị bọn thần học công kích vì chúng không muốn rằng « vô tận thực tại » được thừa nhận. Hinbe có hoài bão, muốn gói toàn bộ toán học vào trong một hệ hình thức, hoài bão đó trái với quan điểm duy vật biện chứng và trên thực tế bị hai định lý của Göden đập tan.

Còn có thể kể thêm những ví dụ khác, nhưng dù có kể thêm thì người ta vẫn nghĩ rằng số ví dụ đó là rất ít so với biết bao nhiêu phát minh toán học trong lịch sử. Vả chăng, hình như các ví dụ đó chỉ đụng đến các phát minh lớn, các nhà toán học lớn, còn những người bình thường như chúng ta, những học sinh phổ thông và học sinh đại học học toán, những thầy giáo dạy toán ở phổ thông và đại học, những người nghiên cứu toán chưa có phát minh gì lớn lắm, chúng ta dễ có cảm tưởng là chúng ta đứng ngoài cuộc, chúng ta dễ có cảm tưởng là các vấn đề về thế giới quan chưa có ảnh hưởng gì rõ rệt, tích cực hay tiêu cực đến việc học toán, dạy toán và nghiên cứu toán.

Các giáo trình về « phương pháp giảng dạy toán » đều có ghi việc rèn luyện nhân sinh quan và thế giới quan duy vật biện chứng làm

một trong những biện pháp quan trọng của việc dạy toán ở bậc phổ thông. Nhưng trong thực tế thì việc thực hiện mục đích này ở trong các trường phổ thông của chúng ta cho đến nay vẫn chưa có một sự tổng kết nghiêm túc và do đó cũng chưa có một sự nâng cao đáng kể nào trong việc thực hiện mục đích này. Hầu như các thầy giáo chỉ biết thực hiện mục đích này qua một vài mẫu lịch sử toán học và qua một vài ứng dụng của toán học vào đời sống để chứng tỏ rằng : « Toán học phát sinh và phát triển chủ yếu là do nhu cầu của cuộc sống và toán học cuối cùng cũng là để phục vụ cho cuộc sống của con người ». Nhưng việc sưu tầm lịch sử toán học của ta còn rất nghèo nàn và các ví dụ việc ứng dụng của toán học vào trong thực tiễn cuộc sống của chúng ta cũng không nhiều, có khi còn gượng gạo, ấu trĩ.

Ở bậc đại học, người học sinh học triết học duy vật biện chứng và ở đại học sư phạm còn học cả tâm lý học nữa. Nhưng, những bài học đó về triết học và tâm lý học gần như không giúp ích cho họ học toán giỏi hơn ; họa chăng những bài học về triết học có giúp cho họ lĩnh hội được những ý kiến của thầy khi thầy giảng về những vấn đề thuộc về lịch sử toán học, những vấn đề về tiêu chuẩn chân lý trong toán học. Triết học Mác—Lênin ở đây chỉ mới dùng để giải thích lịch sử toán học, chưa được dùng để cải tạo việc học toán, dạy toán, nghiên cứu toán.

Ở trình độ trên đại học, tình hình có lẽ cũng không hơn gì. Ngoài động cơ, mục đích học tập, nghiên cứu ra, chúng ta làm toán chắc cũng không khác gì lắm một người không theo chủ nghĩa Mác—Lênin.

Trước khi trình bày một số thu hoạch qua kinh nghiệm bản thân, tôi thấy cần nói rõ rằng lúc mới bắt đầu học tập triết học duy vật biện chứng, tôi không hiểu gì mấy và do đó cảm thấy nó không liên quan gì đến việc dạy, học và nghiên cứu toán của mình ; dần dần, chịu khó vận dụng, từ chỗ vận dụng sống sượng lúc đầu đến chỗ mỗi ngày một nhuần nhuyễn hơn, tôi đã hiểu được ít nhiều những qui luật chi phối tư duy toán học của mình, dưới ánh sáng của triết học duy vật biện chứng ; những hiểu biết đó thấm dần và đến một mức nào đó thì trở thành quan điểm, phương pháp tư tưởng ; và từ đó trở đi tôi bắt đầu cảm thấy rằng : ngay trong việc học, dạy và nghiên cứu toán, triết học duy vật biện chứng đúng là kim chỉ nam cho hành động của mình, giúp cho việc nâng cao hiệu suất của hành động đó, chứ không phải chỉ dừng lại ở chỗ giải thích hành động đó.

Lôgic để trình bày toán học là lôgic hình

thức. Vì khi lập luận trên một khái niệm toán học nào đó, ta tạm thời cô lập khái niệm đó ra, không đặt nó vào trong quá trình chuyển hóa, thành một khái niệm khác. Nhưng khi nói đến sự phát triển của toán học thì vấn đề lại khác. Ở đây vai trò của lôgic biện chứng nổi hẳn lên, vì muốn phát triển toán học phải hình dung các khái niệm toán học trong quá trình chuyển hóa thành những khái niệm tổng quát hơn, phức tạp hơn. Tôi không phải là một nhà tâm lý học chuyên nghiên cứu về tư duy sáng tạo trong toán học, nhưng kinh nghiệm bản thân cho tôi thấy rằng nên biết vận dụng mối quan hệ biện chứng giữa các cấp phạm trù sau đây thì nâng cao thêm được ít nhiều năng lực sáng tạo toán học của mình :

- Lí luận và thực tiễn, cụ thể và trừu tượng.
- Cái chung và cái riêng.
- Nội dung và hình thức, bản chất và hiện tượng.
- Chủ quan và khách quan.
- Suy diễn và qui nạp, phân tích và tổng hợp.

Không phải chỉ có trong nghiên cứu mới sáng tạo, mà trong học tập cũng sáng tạo, còn giảng dạy thì phải rèn óc thông minh, sáng tạo cho học sinh. Bởi vậy, sau đây tôi sẽ không tách riêng ra ba phần : « học tập, giảng dạy, nghiên cứu » để trình bày.

1. Lí luận và thực tiễn, cụ thể và trừu tượng.

Khi nói đến lí luận và thực tiễn trong toán học thì thường người ta nghĩ đến những chuyện lớn qua các thời kì phát triển của toán học, qua việc ra đời và phát triển của lí thuyết toán học này hay lí thuyết toán học kia, về những cuộc đấu tranh giữa duy tâm và duy vật chung quanh vấn đề tiêu chuẩn chân lý trong toán học. Ở đây tôi muốn nói đến vấn đề trên trong phạm vi công tác toán học của những người bình thường chúng ta.

Trong công tác nghiên cứu toán học, chúng ta đều thấy rằng thực tiễn cuộc sống, thực tiễn ngành, nghề, thực tiễn giảng dạy là nguồn cung cấp đề tài dồi dào. Tất cả các đề tài lớn nhỏ của tôi đều bắt nguồn từ thực tiễn giảng dạy hay nói một cách chính xác hơn, từ thực tiễn luôn luôn cải tiến việc giảng dạy của mình.

Đối với các thực tiễn khác cũng vậy thôi. Chỉ có thực tiễn thôi chưa đủ, mà phải có ý chí cải tạo thực tiễn đó thì mới nảy sinh ra các đề tài nghiên cứu khoa học. Không có ý chí đó thì không ai bỗng dưng nghĩ ra đề tài được, trừ trường hợp lấy đề tài trong các tạp chí

thông tin toán học. Nhưng ngay cả trong trường hợp này, sở dĩ người ta chọn đề tài này mà không chọn đề tài kia trong tập chỉ thông tin, cũng là do một thực tiễn nào đó chi phối, chứ không thể hoàn toàn là một sự ngẫu nhiên, tùy hướng. Mặt khác, trong quá trình giải quyết một đề tài, những khái quát có tính chất lý luận thường không ra đời một cách đơn giản, có khi phải xét rất nhiều trường hợp đặc biệt, cụ thể để rồi từ đó lần mò dần ra cái trừu tượng, khái quát. Tôi đã xây dựng nên lý thuyết tổng quát về « các không gian có tuyệt đối động » bằng cách phân tích, mổ xẻ một trường hợp đặc biệt trước ; có nhiều trừu tượng tôi khó mà nghĩ ra nếu như không có những gợi ý của những phát hiện cụ thể đi trước.

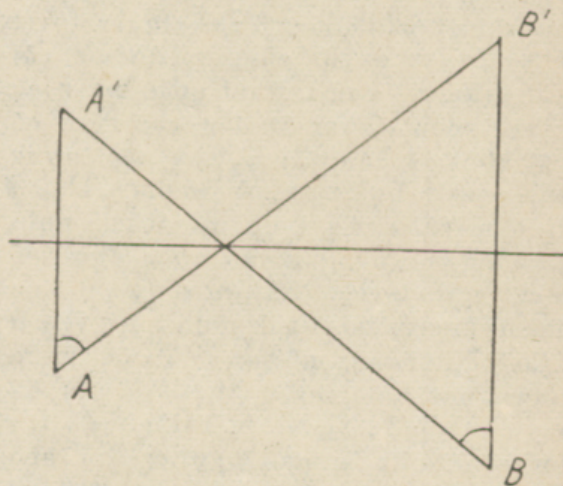
Ngược lại, trong quá trình giải quyết một đề tài thì càng nắm vững những lý luận trừu tượng, khái quát, hiện đại bao nhiêu thì càng có nhiều công cụ sắc bén, để phát hiện ra cái mới bấy nhiêu. Đối với toán học thì rõ ràng những lý luận trừu tượng và khái quát chung quanh các khái niệm « tập hợp, ánh xạ, cấu trúc mô hình » đã từng cung cấp những công cụ có hiệu lực cho những người nghiên cứu, trong đó có tôi.

Nhận thức được mối quan hệ biện chứng giữa lý luận và thực tiễn còn rất quan trọng ở chỗ nó giúp cho người làm toán xác định được dứt khoát thái độ của mình trong trường hợp gặp những mâu thuẫn giữa bản chất và hiện tượng.

Ngày xưa, Xăckêri và Lămbe hoang mang trước việc phủ định tiên đề Oclit mà không đi tới mâu thuẫn lôgic nào, nhưng lại dẫn đến những sự kiện rất trái ngược với trực giác thông thường. Ngày nay, chúng ta, một mặt đã có những kinh nghiệm lịch sử, mặt khác nắm vững mối quan hệ giữa lý luận và thực tiễn, nắm vững tiêu chuẩn chân lý trong toán học nên chúng ta không hoang mang trước những sự việc tương tự: gần đây tôi có đặt nền móng cho một lý thuyết mới gọi là « lý thuyết các không gian có tuyệt đối động » mà mới đầu xem ra cũng rất trái với trực giác thông thường « tuyệt đối » có thể gọi nôm na là « thế giới ở vô tận ». « Thế giới ở vô tận » của không gian Oclit là « phẳng », của không gian phi Oclit là « cong » nhưng dầu sao thế giới đó là cố định và do đó là chung cho mọi điểm trong không gian: một điểm A đã cách xa vô tận một điểm B thì nó cũng cách xa vô tận mọi điểm khác của không gian.

Trong lý thuyết của tôi « thế giới vô tận » không cố định, nó thay đổi đối với từng điểm

của không gian: một điểm A cách xa vô tận một điểm B lại chỉ cách xa hữu hạn nhiều điểm khác của không gian. Lúc đầu tôi cũng cảm thấy hơi khó nhận thức trực giác và do đó có nghi ngờ: « Hay là mình nhầm ở đâu ? » Tôi đã kiểm tra lại kỹ càng và không thấy sai ở đâu cả. Lúc đó tôi đã tin đến 9 phần 10 vì không gặp mâu thuẫn gì về mặt tư duy thì có hi vọng là phù hợp với thực tiễn, vì nguồn gốc của tư duy là thực tiễn. Để tin chắc mười phần mười thì phải tìm ra ít nhất một mô hình, tức là tìm ra một sự thể hiện của lý luận trong thực tiễn. Tôi đã tìm ra một số mô hình: sau đây là mô hình đơn giản nhất của lý thuyết: lấy một cái gương và xét thế giới ở trước gương với qui ước gọi khoảng cách giữa hai người. A, B là góc mà mỗi người nhìn thấy ảnh A', B' của họ ở trong gương:



đó là góc $A'AB'$ hoặc góc $A'B'B'$. Thế giới vô tận của A là mặt nón đẳng hướng đỉnh A' , còn thế giới vô tận của B là mặt nón đẳng hướng đỉnh B' . Rõ ràng hai điểm A, B có hai thế giới vô tận khác nhau. Trong nghiên cứu đã vậy thì trong giảng dạy phải làm sao cho học sinh tiếp xúc với thực tiễn trước khi dẫn dắt họ vào lý luận trừu tượng. Đó là một nguyên tắc sư phạm có đã từ lâu. Nhưng tôi nghĩ không nên chỉ dừng ở đó. Phải tập dượt cho học sinh, làm quen với việc từ thực tiễn khái quát lên thành lý luận với ý thức cải tạo thực tiễn, nâng cao hiệu suất học tập. Việc này sẽ nói kỹ ở phần « suy diễn và qui nạp ».

2. Cái chung và cái riêng.

Xét đến một phương diện nào đó thì cái chung và cái riêng là mâu thuẫn, và xét đến một phương diện khác thì cái chung và cái riêng là thống nhất, cái chung bao trùm lên cái riêng, cái riêng nằm trong cái chung. Mỗi cái riêng có thể nằm trong nhiều cái chung

khác nhau và mỗi cái chung như vậy ứng với một cách nhìn về cái riêng, ứng với một quan điểm làm cơ sở cho sự thống nhất giữa cái chung đó và cái riêng. Từ một cái riêng, nếu biết nhìn theo nhiều quan điểm khác nhau thì có thể khái quát thành nhiều cái chung khác nhau, và nhiều cái chung khác nhau nhiều khi đem đặc biệt hóa đi, lại cho ta cùng một cái riêng. Ví dụ: vòng tròn vừa là trường hợp riêng của mặt cầu, vừa là trường hợp riêng của elip. Xét về số chiều thì vòng tròn và mặt cầu là mâu thuẫn, nhưng xét về tính chất « cách đều một điểm cố định » thì vòng tròn và mặt cầu là thống nhất. Xét về tính chất: « Cách đều một điểm cố định » thì vòng tròn và elip là mâu thuẫn, nhưng xét về tính chất tổng khoảng cách tới hai điểm cố định không đổi thì vòng tròn và elip là thống nhất.

Trong khoa học, không có cái « mới » tuyệt đối, cái « mới » bao giờ cũng ra đời từ cái « cũ », kế thừa cái « cũ ». Khái quát mở rộng cái « cũ » là con đường đi đến cái mới, có người vì không hiểu qui luật này nên tưởng lầm rằng « mới » phải là « mới toanh », không dính gì đến cái « cũ ». Có những cách nhìn cái cũ không cho phép ta mở rộng được để đi đến cái mới và việc tìm tòi, sáng tạo lúc đó chính là tìm ra một cách nhìn mới về cái « cũ ». Có thể nói rằng mỗi cái « cũ » đều chứa đựng sẵn trong lòng nó những cái mới đã biết hay chưa biết. Nếu đó là cái mới đã biết thì bao giờ nó cũng quan hệ với cái cũ theo cái quan hệ biện chứng giữa cái chung và cái riêng. Nếu là cái mới chưa biết thì người ta sẽ khám phá ra nó chừng nào có mâu thuẫn giữa cái cũ đó với những nhu cầu thực tiễn hay lý luận; mâu thuẫn đó thúc đẩy công việc nghiên cứu để giải quyết nó và khi mâu thuẫn được giải quyết thì đó là lúc cái mới ra đời.

Nắm vững qui luật trên đây, chúng ta sẽ biết dạy và học toán tốt hơn, và cũng có thể nghiên cứu toán học có hiệu quả hơn. Sau đây là một ví dụ :

Ví dụ 1 : Ít có thầy giáo cho học trò thấy mâu thuẫn và thống nhất giữa tam giác và tứ giác. Mâu thuẫn ở chỗ một bên có 3 cạnh và bên kia có 4 cạnh, thống nhất ở chỗ nếu một tứ giác có một cạnh nhỏ dần và đi đến triệt tiêu thì nó chuyển hóa thành một tam giác. Cách nhìn này làm cho người học sinh khi biết một kiến thức về tam giác có thể dự đoán ra một hay nhiều kiến thức của tứ giác. Tất nhiên là còn phải mò mẫm nhưng đã có phương hướng cho sự mò mẫm đó. Ví dụ biết công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos A$ trong tam giác, học sinh có phương hướng

để mò mẫm, dự đoán ra một công thức tổng quát hơn trong tứ giác : công thức bi mật này nhất định phải trở thành công thức nêu ra ở trên khi ta cho cạnh thứ tư triệt tiêu. Đó là một tia sáng rọi vào màn bi mật và học sinh có ngay phương hướng để tìm tòi cái mới (mới đối với học sinh).

Ví dụ 2 : Định lý về ba đường trung tuyến đồng qui có thể mở rộng ra như thế nào ?

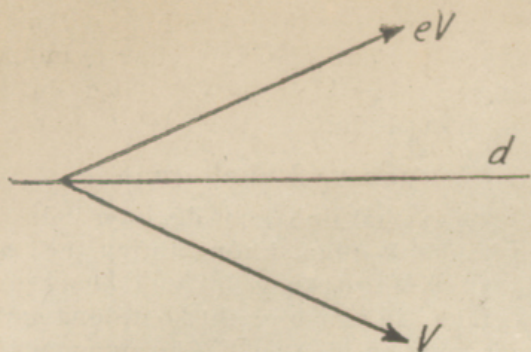
Nếu xem trung điểm của mỗi cạnh như là trọng tâm của cạnh đó thì hướng mở rộng là như sau : xét xem trong một tứ diện, bốn đường thẳng nối bốn đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện có đồng qui hay không ?

Nếu xem trung điểm của mỗi cạnh như là tâm của một vòng tròn không chiều gồm hai đầu mút của cạnh đó thì ta lại có nghi vấn khoa học sau đây : xét xem trong tứ diện, bốn đường thẳng nối bốn đỉnh với tâm vòng tròn ngoại tiếp mặt đối diện có đồng qui hay không ?

Còn có nhiều cách xem khác, như xem trung điểm của mỗi cạnh là điểm liên hợp điều hòa của điểm ở vô tận đối với hai đầu mút của cạnh. Mỗi cách xem xét đó đều có khả năng đưa người học sinh đến một kiến thức mới do bản thân tự tìm ra.

Ví dụ 3 : Ta hãy xem một số thực là một mệnh lệnh. Ví dụ, số 2 đặt trước một cái gì đó thì hiểu đó là cái lệnh phải lấy hai cái đó, hay phải gấp đôi cái đó; trong trường hợp số 2 đặt trước một vector V thì ta hiểu đó là lệnh phải kéo dài vector V gấp đôi theo hướng của vector đó; hiểu theo nghĩa đó thì tích của hai số, ví dụ 2×3 , đặt trước một vector là hai lệnh phải thực hiện liên tiếp : $(2 \times 3)V = 2(3V)$: trước hết thực hiện lệnh 3 (kéo dài V gấp 3), tiếp đó thực hiện lệnh 2 đối với vector có được sau khi đã chấp hành lệnh trước.

Với các lệnh là những số thực, ta thấy ta bất lực trong việc đổi phương của một vector. Muốn đổi phương các vector, phải có những lệnh mới. Ta sẽ gọi i là lệnh quay vector đi 90° ngược chiều kim đồng hồ. Thực hiện liên tiếp hai lệnh i thì cũng như thực hiện lệnh $-i$, vì quay liên tiếp hai lần góc 90° thì cũng như quay một lần góc 180° . Vậy $i^2 = -1$. Cái đơn vị ảo $i = \sqrt{-1}$ ở đây chẳng còn gì là bí hiểm. Không những thế, dạy cho học sinh số ảo theo kiểu này thì học sinh có thể tự mình nghĩ ra những loại số khác bằng cách tưởng tượng thêm những lệnh mới. Chẳng hạn, nếu e là lệnh phải lấy hình đối xứng của của V qua một đường thẳng d , thì $e(eV) = V$ tức là $e^2 = 1$.



Như vậy là tự học sinh đã khám phá ra một loại đại số mới (mới đối với học sinh) trong đó số 1 có bốn căn bậc 2 là $+1, -1, +e, -e$.

Ví dụ 4: Sự mở rộng khái niệm về « khoảng cách » giữa hai cặp nghiệm của hai phương trình bậc hai là điểm mấu chốt trong luận án tiến sĩ của tôi. Khi mở rộng khái niệm này, tôi đụng đầu vào những khó khăn to lớn để làm nản lòng, buồng trôi. Nhưng tôi kiên trì và vẫn định ninh rằng cái « mới » tôi đang tìm đã nằm sẵn trong cái « cũ » nhưng chưa tìm ra vì chưa tìm ra một cách nhìn mới về cái « cũ ». Cái kiên trì đó đưa tới cái kiên trì lật đi lật lại cái « cũ » và cuối cùng đã tìm ra. Quả thật, nếu không nắm vững mối quan hệ biện chứng giữa cái « chung » và cái « riêng » thì gặp trường hợp như thế này, tôi có thể đi đến kết luận là « không thể mở rộng được » và bỏ đề tài.

3. Nội dung và hình thức, bản chất và hiện tượng

Nội dung quyết định hình thức và hình thức ảnh hưởng trở lại nội dung, cho nên trong việc dạy toán, học toán, nên chú ý dạy và học cả cách kí hiệu, cách dùng ngôn ngữ. Trong nghiên cứu toán học, cách dùng kí hiệu có thể làm tăng hay giảm sức sáng tạo. Sau đây là những ví dụ:

Ví dụ 1: Phải dạy cho học sinh biết cách dùng kí hiệu một cách có trật tự như x phải đi với a; y đi với b, z đi với c, A phải đi với A', B phải đi với B' v.v.. Đó không phải chỉ là một yêu cầu về giáo dục một số đức tính trong lao động toán học, mà đó là cách kí hiệu phản ánh được sự hài hòa, đối xứng, trật tự trong nội dung các sự kiện toán học và chính vì vậy mà nó tăng được hiệu suất làm toán: nhiều khi ta chỉ mất công tìm ra hay chứng minh được một sự kiện toán học nào đó rồi chỉ việc thực hiện những hoán vị trên các chữ là có ngay một loạt sự kiện khác.

Ví dụ 2: Toán quỹ tích là một loại toán mà học sinh rất sợ. Vì sao vậy? Vì hình thức diễn tả cổ điển về phần thuận, phần đảo, điều kiện cần, điều kiện đủ v.v... khá rườm rà, không phản ánh được gọn gàng nội dung. Chính vì vậy mà nhiều học sinh không sao hiểu được ý nghĩa của phần đảo. Nhưng, nếu ta dùng ngôn ngữ tập hợp thì rất gọn gàng và rõ ràng: thực chất là chứng minh sự đồng nhất của hai tập hợp; phần thuận chứng minh rằng tập đầu là tập con của tập sau, phần đảo chứng minh rằng tập sau là tập con của tập đầu.

Ví dụ 3: Trong công trình xây dựng « Lí thuyết các không gian có tuyệt đối động » của tôi, việc thay kí hiệu tenxơ bằng kí hiệu toán từ không những đạt yêu cầu gọn hơn mà rõ ràng là có tác dụng gợi cảm hơn trong việc tìm cái mới.

Ví dụ 4: Ai cũng hiểu tầm quan trọng của « hình học hóa ». Đó chẳng qua là cố gắng dùng ngôn ngữ « hình học » để diễn tả các tương quan giữa các phần tử của một tập hợp. Tuy chỉ là vấn đề « ngôn ngữ » tức là một vấn đề hình thức nhưng nó phản ánh được cấu trúc bên trong và nó huy động được trí tưởng tượng không gian của người học, dạy, nghiên cứu toán để hiểu rõ hơn, truyền thụ tốt hơn (vì có hình ảnh) và nghiên cứu có hiệu quả lớn.

Bản chất là cái lõi cốt, cái bền vững nhất, cái có ý nghĩa quyết định nhất trong nội dung. Hiện tượng là những biểu hiện ra bên ngoài của bản chất. Hiện tượng cho ta những gợi cảm về hướng để đi sâu vào bản chất và khi đã nắm được bản chất rồi thì ta vững vàng hơn, không lúng túng, bị động trước những thay đổi về hình thức bề ngoài và như vậy ta cũng đi đến sáng tạo dễ dàng hơn. Ví dụ trong hình học giải tích ta thấy rằng dạng $aa' + bb' + cc'$ xuất hiện trong biểu thức giải tích của tích vô hướng, trong phương trình đường thẳng, phương trình tiếp tuyến của một conic, trong điều kiện liên hợp của hai đường kính v.v... Điều đó gợi cho ta phải đi sâu vào nội dung, vào bản chất và cuối cùng chúng ta thấy ra rằng những sự giống nhau về hình thức đó phản ánh cùng một nội dung là « dạng đối cực » đối với đại số và « chia điều hòa » đối với hình học. Nếu thầy giáo làm cho học sinh nắm được bản chất như thế thì họ sẽ nhạy cảm hơn, sẽ sáng tạo hơn. Chẳng hạn khi nhìn công thức:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

thì học sinh viết ngay được điều kiện vuông góc bằng cách cho triệt tiêu dạng đối cực của ds^2 mà không cần chờ học đến biểu thức để tính góc. Một ví dụ khác là trong các giáo trình toán

ở đại học, thường gặp phương trình đặc tính. Hiện tượng đó gọi cho ta phải đi sâu tìm hiểu bản chất và ta sẽ thấy rằng ở đâu có xuất hiện phương trình đặc tính là ở đó đều có việc tìm các vector riêng của một phép biến đổi tuyến tính có khi ẩn náu khó thấy. Khi học sinh đã nắm được bản chất như vậy rồi thì họ sẽ dễ dàng chủ động, không lúng túng khi có những thay đổi bề ngoài như thay biến số, thay đổi hệ tọa độ.

Bản chất là cái gì khá chắc chắn, ổn định. Trong toán học thì «bất biến», «cấu trúc» chính là những cái bản chất. Nắm vững những cái bản chất đó thì ta càng có khả năng linh hoạt về hình thức để tạo nên những thuận lợi cho việc nghiên cứu. «Cấu trúc» là bản chất, các mô hình là biểu hiện ra bên ngoài của bản chất đó. Dùng các mô hình cụ thể để đi sâu vào cấu trúc rồi lại từ những điều hiểu biết sâu thêm về cấu trúc đó mà trở lại mô hình đó hay một mô hình khác cũng là một phương pháp nghiên cứu hay được vận dụng và mang lại kết quả vì đó là con đường: «Từ thực tiễn sinh động đến tư duy trừu tượng rồi lại từ tư duy trừu tượng đến một thực tiễn khác cao hơn».

Hình thức ảnh hưởng trở lại nội dung như trên đã nói, và do đó, những biểu hiện hình thức có thể gọi cho ta hướng suy nghĩ về nội dung, nhưng không thể cho rằng hình thức là quyết định. Bệnh «hình thức» trong học sinh thể hiện ở chỗ học sinh hay căn cứ vào những biểu hiện hình thức mà kết luận về nội dung, chẳng hạn, căn cứ vào những sự tương tự về mặt hình thức mà kết luận ra một sự tương tự về nội dung. Nguyên nhân của bệnh hình thức trong học sinh là do chưa nắm sâu, nắm chắc nội dung. Bệnh «hình thức» hiện nay khá phổ biến trong học sinh phổ thông và đại học, và «chống bệnh đó» là một trong những nhiệm vụ quan trọng của công tác dạy toán hiện nay.

Đối với các nhà toán học thì «chủ nghĩa hình thức» (trường phái Hinbe) thể hiện ở hoài bão gói toàn bộ toán học vào trong những hệ kí hiệu hình thức đã hoàn toàn mất hết nội dung, và cũng đứng trong các hệ hình thức đó mà giải quyết vấn đề chân lí trong toán học. Hai định lí quan trọng của Göden đã đập tan hoài bão đó. Xét về một mặt khác thì với những kí hiệu hình thức đã mất hết nội dung, ta có thể chứng minh được nhưng không thể sáng tạo được. Hình thức hóa đã dẫn tới các máy chứng minh nhưng các máy đó không thể phát minh toán học được và cũng chỉ có thể chứng minh được những định lí mà con người đã chứng minh. Chưa nói đến việc hình thức hóa

triệt để, chỉ riêng việc quá lạm dụng ngôn ngữ và kí hiệu của lí thuyết tập hợp cũng làm cho sự tiếp thu toán học thêm khó khăn và sự sáng tạo toán học bị hạn chế. Đây cũng là một vấn đề cần cân nhắc kĩ trong việc hiện đại hóa chương trình toán.

4. Chủ quan và khách quan

Chủ quan phải linh hoạt để luôn luôn phù hợp với khách quan, không những thế, phải lường trước những thay đổi của khách quan để cố giành thế chủ động thì hoạt động mới có kết quả, mới có hiệu suất. Chủ quan phải có những nỗ lực cố gắng thì mới tận dụng được các thuận lợi khách quan. Khách quan phải phát triển đến một trình độ nhất định thì những sự nỗ lực, chủ quan mới có kết quả. Cùng những điều kiện học tập, giảng dạy, nghiên cứu toán học như nhau, sự nỗ lực chủ quan khác nhau đưa đến những kết quả khác nhau. Cái gì có ý nghĩa quyết định nhất trong sự nỗ lực chủ quan của mỗi con người học toán, dạy toán, nghiên cứu toán? Theo tôi thì đó là «độc lập suy nghĩ» và «tư tưởng tiến công». Không có hai yếu tố đó thì chỉ có tiếp thu thụ động và không sâu sắc. Đó là nói chung về sự cố gắng học toán, dạy toán, nghiên cứu toán. Đứng trước mỗi bài toán cụ thể mỗi đề tài cụ thể thì việc vận dụng mối quan hệ giữa «khách quan và chủ quan» cũng được đặt ra. Đối với người học sinh thì khách quan bao gồm những kiến thức mà học sinh đó đã có khi ngồi trước một bài toán cụ thể và những dữ kiện của bài toán. Lao động để làm bài toán đó là chủ quan của người học sinh. Thường, người học sinh không nghiên cứu đầy đủ những đặc điểm của đề toán mà hay máy móc, rập khuôn, bẻ nguyên xi một phương pháp sẵn có trong sách ra để làm toán, hậu quả là làm không được hoặc phương pháp không hay. Cũng có trường hợp học sinh đã có thêm kiến thức mới nhưng không vận dụng được để có cách giải toán hay hơn. Trong cả hai trường hợp, chủ quan đã không tận dụng được các thuận lợi khách quan.

Để chống bệnh «máy móc», «rập khuôn», bên cạnh những bài tập thông thường, phải dùng ít ra những bài tập trong đó, do đặc điểm của đề bài, không thể hoặc không nên vận dụng máy móc lí thuyết đã học.

Đối với những bài toán tương đối phức tạp, khi đề xuất một cách giải nào đó, thường chưa lường trước được hết mọi hậu quả cho nên cần phải có ít thức dành thế chủ động để cho hậu quả ra sao cũng vẫn còn khả năng xử lí, chứ không phải cam chịu thất bại rồi bắt đầu lại từ đầu; nói chung, đứng trước

một bài toán, người làm toán thường có nhiều quyền tự do như tự do lựa chọn hệ tọa độ, lựa chọn phép biến đổi tọa độ, tự do lựa chọn một điểm, một đường thẳng nào đó v.v... Người làm bài thường cố gắng phân tích đầu bài để sử dụng quyền tự do của mình một cách đúng đắn nhất, đưa đến kết quả ngay. Nhưng đối với những bài toán phức tạp, dù giải phân tích cũng không dễ gì sử dụng quyền tự do đó đúng đắn ngay từ đầu để còn khả năng đối phó với tình hình xấu có thể xảy ra, nên dành ra một vài quyền tự do tạm thời chưa sử dụng để có cái mà cơ động, linh hoạt sau này. Ví dụ khi chọn một phép biến đổi tọa độ thì trong ma trận của phép đó có thể còn trừ lại vài phần tử chưa có giá trị bằng số xác định mà các giá trị bằng số đó sẽ được chọn sau, tùy theo sự diễn biến của quá trình làm toán.

Đối với công việc nghiên cứu toán học thì khách quan còn được hiểu rộng hơn, bao gồm cả tình hình phát triển toán học trên thế giới. Người nghiên cứu cần biết tận dụng những thành tựu mới nhất để phục vụ cho việc nghiên cứu của mình hoặc để xem xét lại những kết quả nghiên cứu cũ xem có thể cải tiến hơn được nữa không. Sau đây là một ví dụ nhỏ của bản thân để minh họa điều nói trên: các công thức lượng giác Lôbasepxki đã được thiết lập từ lâu và trong lúc thiết lập người ta đều đi con đường «từ đơn giản đến phức tạp», nghĩa là xét tam giác vuông trước rồi mới xét tam giác thường sau, bằng cách chia tam giác thường ra thành hai tam giác vuông. Tôi nghĩ: «có nhất thiết phải đi con đường từ đơn giản đến phức tạp không? Sao lại không nghĩ đến việc đi con đường ngược lại, từ phức tạp đến đơn giản». Đặt vấn đề như thế vì tôi cho rằng hoàn cảnh khách quan lúc loài người lần đầu tiên thiết lập các công thức lượng giác Oclit khác với hoàn cảnh khách quan lúc loài người lần đầu tiên thiết lập công thức lượng giác Lôbasepxki. Trước kia hình học Oclit phải tự lực, còn sau này hình học Lôbasepxki có thể dựa vào hình học Oclit qua mô hình Poăngcarê và với sự «giúp đỡ» này thì có thể đi thẳng vào trường hợp phức tạp mà không cần qua trường hợp đơn giản trước (tức là thiết lập ngay công thức lượng giác cho tam giác thường không cần phải làm trước đối với tam giác vuông). Tôi đã đem thực hiện những điều suy nghĩ này và kết quả rất mỹ mãn, đơn giản đi rất nhiều cách thiết lập các công thức lượng giác Lôbasepxki.

5. Suy diễn và qui nạp, phân tích và tổng hợp.

Để trình bày toán học chặt chẽ thì sau khi nêu các khái niệm cơ bản và các tiên đề, chúng ta dùng suy diễn để rút ra các định lý. Lâu nay, trong việc dạy học, hình như chúng ta chỉ đặt mục đích truyền thụ kiến thức, làm cho học sinh hiểu các định nghĩa, định lý và cách chứng minh, nên chúng ta cho rằng «suy diễn», giữ một vai trò gần như độc lập trong toán học. Nhưng nếu chúng ta đặt vấn đề «rèn luyện óc thông minh sáng tạo» cho học sinh thì vai trò của «qui nạp» sẽ nổi lên. Thật ra, với «suy diễn», ta cũng có thể tìm ra được những cái «mới», nhưng vì «suy diễn» là đi từ cái chung đến cái riêng nên những cái mới đó cũng chỉ là những cái riêng mà trước đó chưa ai biết, và do đó tầm quan trọng rất hạn chế.

Cái «mới» thực sự, quan trọng chính là do sự mở rộng, khái quát, trong đó «qui nạp» đóng một vai trò rất quan trọng. Ví dụ, từ chỗ gặp rất nhiều hiện tượng phụ thuộc nhiều thông số và giữa các thông số đó có những quan hệ giống về mặt hình thức giữa các quan hệ giữa các tọa độ của một điểm trong hình học, người ta đã qui nạp, khái quát lên thành khái niệm «không gian nhiều chiều». «Sáng tạo» là một loạt suy diễn và qui nạp kế tiếp nhau; suy diễn đưa đến những sự kiện cụ thể, riêng biệt, sau đó người làm toán so sánh, đối chiếu các sự kiện với nhau, phát hiện ra những dấu hiệu chung rồi cố khái quát lên thành một lý thuyết tổng quát; khi lý thuyết này đã đạt được cơ sở vững chắc thì suy diễn lại giúp đi sâu vào lý thuyết đó, giúp phát hiện ra những sự kiện cụ thể v.v...

Trong việc giảng dạy cho học sinh, thường khi ra bài tập, thầy giáo chỉ đòi hỏi chứng minh những chân lý mà đề bài đã nói rõ, do đó học sinh thường chỉ cần dùng đến suy diễn. Nếu ra những bài tập trong đó điều gì phải chứng minh cũng chưa rõ lắm, tự học sinh phải xác định lấy thì trong nhiều trường hợp sẽ buộc học sinh tập luyện một số phương pháp tư duy trong đó có qui nạp để chính xác hóa điều phải chứng minh. Ví dụ, đáng lẽ ra cho học sinh chứng minh hệ thức nọ, hệ thức kia thì bắt họ phải tìm một hệ thức giữa một số biến nào đó mà hệ thức này dễ tìm ra bằng qui nạp hơn là bằng suy diễn.

Muốn suy diễn cho đúng hướng nhằm mau tới đích thì phải phân tích. Khi đã suy diễn đến một bước nào đó mà mất phương hướng

thì phải nhìn tổng hợp lại từ đầu mới có khả năng phân tích tiếp, hoặc khi cần quy nạp thì cũng phải tổng hợp nhiều kết quả cụ thể lại. Cho nên nếu « sáng tạo » là một loạt suy diễn và qui nạp kế tiếp nhau, cái này chuẩn bị điều kiện cho cái kia, thì phải nói thêm rằng suy diễn và qui nạp theo các bước như thế nào là do phân tích và tổng hợp xen kẽ nhau hướng dẫn. Vận dụng nhuần nhuyễn suy diễn và qui nạp, phân tích và tổng hợp sẽ đưa đến nhạy cảm toán học.

Học sinh chúng ta, kể cả ở phổ thông và đại học, nói chung rất yếu về khả năng phân tích và tổng hợp. Nguyên nhân là ở cách dạy, cách học, thầy giáo chỉ đòi hỏi học sinh hiểu chứng minh như thế nào chứ không đòi hỏi học sinh hiểu tại sao lại chứng minh như thế.

..

Qua những điều trình bày ở trên, tôi thấy rằng có thể kết luận như sau: « việc học tập triết học duy vật biện chứng quả có giúp ích cho việc học tập, giảng dạy và nghiên cứu toán học. Nhưng thế thì chúng ta trả lời câu hỏi sau đây ra sao :

Các nhà toán học tư sản không tán thành chủ nghĩa Mác—Lê-nin sao làm toán cũng giỏi? Ở đây cần phân biệt quan điểm của họ và qui luật khách quan của lao động toán học của họ. Quan điểm của họ là duy tâm, là siêu hình nhưng lao động sáng tạo toán học của họ vẫn tuân theo những qui luật khách quan phù hợp với chủ nghĩa Mác—Lê-nin, ngoài ý muốn chủ quan của họ. Có thể

nói rằng khi lao động sáng tạo toán học, họ là những nhà « duy vật biện chứng » không tự giác. Nếu họ mà tự giác thì chắc là kết quả nghiên cứu toán còn tốt hơn (lịch sử cũng đã chứng minh điều đó). Vấn đề không phải là đem so sánh một nhà toán học tư sản giỏi với một nhà toán học tồi của chúng ta, mà vấn đề là mỗi người làm toán chắc sẽ làm toán có kết quả hơn nếu như người đó thấm nhuần triết học duy vật biện chứng. Bởi vậy, các nhà khoa học nói chung, các nhà toán học nói riêng rất cần học triết học duy vật biện chứng để rèn luyện lập trường, quan điểm đã đành và cũng để làm khoa học, làm toán có hiệu quả hơn. Tuy nhiên, phải nói rằng việc dạy triết học duy vật biện chứng trong các trường đại học hiện nay còn có nhiều vấn đề phải bàn đề cải tiến. Còn ở trường phổ thông, tuy chưa học duy vật biện chứng nhưng thầy giáo vẫn có thể xây dựng cho học sinh phương pháp tư tưởng của chủ nghĩa Mác—Lê-nin qua môn toán. Qua nhiều ví dụ lấy ở cấp học phổ thông nói trên, ta thấy rằng việc đó không khó. Làm gì mà học sinh không thấy được tam giác là một tứ giác có một cạnh triệt tiêu. Vấn đề trở nên khó vì ta ngại nó, không làm quen với nó. Ngày xưa, trẻ con « duy tâm », « siêu hình » ngay từ khi còn bé do ảnh hưởng của những người lớn chung quanh. Ngày nay, dưới chế độ xã hội chủ nghĩa, tại sao ta lại không thể làm cho con em chúng ta rất lâu trước khi biết đến danh từ « duy vật biện chứng » đã là một người « duy vật biện chứng ». Đó là trách nhiệm của người lớn, đặc biệt là trách nhiệm của người thầy giáo, trong đó có thầy giáo dạy toán.